

第 I 类两态叠加多模叠加态光场的 非线性高阶压缩特性研究^{*}

侯 洵^{1,2} 杨志勇¹

(¹ 西北大学光子学与光子技术研究所, 西北大学光电子技术省级重点开放实验室, 西安 710069)

(² 中国科学院西安光学精密机械研究所, 瞬态光学技术国家重点实验室, 西安 710068)

摘 要 本文在文献 20 的基础上进一步提出了多模辐射场的 N -Y 最小测不准态、 N -H 最小测不准态、 N -Y 压缩最小测不准态以及 N -H 压缩最小测不准态等的定义. 构造了由多模(q 模)相干态 $|\zeta_j\rangle_q$ 及其相反态 $|-z_j\rangle_q$ 的线性叠加所组成的第 I 类两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$, 利用文献 20 新近提出的有关多模辐射场的两种非线性高阶压缩的定义, 首次对态 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$ 的 N 次方 Y 压缩及 N 次方 H 压缩效应进行了详细研究. 结果表明, 1) 当 N 为偶数时, 态 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$ 恒处于 N -Y 最小测不准态; 当 N 为奇数时, 态 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$ 在一定条件下可呈现出周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩效应. 2) 当 $q \cdot N$ 为偶数时, 态 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$ 恒处于 N -H 最小测不准态; 当 $q \cdot N$ 为奇数时, 在另外的条件下, 态 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$ 则可呈现出周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应. 3) N 次方 Y 压缩及 N 次方 H 压缩效应的压缩深度与腔模总数 q 、压缩参数 R_j 以及压缩阶数 N 等非线性相关, 后者与上述参量的非线性关联程度要比前者的更强.

关键词 两态叠加; 多模叠加态光场; 非线性高阶压缩; N -Y 最小测不准态; N -H 最小测不准态; N -Y 压缩最小测不准态; N -H 压缩最小测不准态

0 引言

众所周知, 光场的压缩以及高阶压缩效应^{1~17, 19~21}, 由于在高保真度的量子保密光通讯、引力波探测、弱光及超弱光信号检测、光学精密计量以及生命系统的超弱光子辐射探测等研究领域有着十分广阔的应用前景, 因而成为当前量子光学领域内的一个十分活跃的前沿性的重大研究课题^{2~4, 20~21}.

人们曾经对光场的压缩及高阶压缩问题做过大量而又富有成效的研究工作^{1~17}, 并且在最近的几年内也取得了许多重要成就^{5~8, 19~21}. 但是, 上述所有这些研究, 只是将注意力主要集中在单模光场的压缩及高阶压缩问题上^{1~17}, 而对于双模光场的情形则涉及较少^{19~20}. 事实上, 进一步深入研究双模及多模辐射场的非线性高阶压缩效应, 不仅具有重要的学术价值, 而且还具有更为广泛的实际意义.

文献 20 在发展现有理论的基础上, 提出了双模及多模辐射场的非线性高阶压缩理论, 并对四态叠加双模叠加态光场的两种非线性高阶压缩(即 N 次方 Y 压缩及 N 次方 H 压缩)效应进行了详细研究, 得出许多既不同于现有报道, 又具重要意义的新结论. 但是, 关于两态叠加第 I 类多模叠加态光场的非线性高阶压缩问题的研究工作, 迄今为止尚未见任何报道. 因此, 鉴于这一问题的重要性, 本文将从理论上进一步探讨.

1 第 I 类两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$

本文所构造的第 I 类两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^{(2)}\rangle_q$, 实际上是一种多模 Schrödinger 猫态光场¹⁸. 其数学表达式为

$$|\Psi^{(2)}\rangle_q = C_{pq}^{(R)} |\{Z_j\}\rangle_q + C_{nq}^{(R)} | \{-Z_j\} \rangle_q \quad (1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_{pq}^{(R)} &= r_{pq}^{(R)} \exp[i \Theta_q^{(R)}] \\ C_{nq}^{(R)} &= r_{nq}^{(R)} \exp[i \Theta_q^{(R)}] \\ Z_j &= R_j \exp[i \Phi_j] \quad (j=1, 2, 3, \dots, q) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} |Z_j\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|Z_j|^2\right] \cdot \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{Z_j^{n_j}}{n_j!} |n_j\rangle \\ | -Z_j \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|Z_j|^2\right] \cdot \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-Z_j)^{n_j}}{n_j!} |n_j\rangle \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} a_j |0_j\rangle &= 0 \\ a_j |Z_j\rangle &= Z_j |Z_j\rangle \\ a_j | -Z_j \rangle &= -Z_j | -Z_j \rangle \\ a_j^N |Z_j\rangle &= Z_j^N |Z_j\rangle \\ a_j^N | -Z_j \rangle &= (-1)^N \cdot Z_j^N | -Z_j \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle Z_j' | Z_j \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|Z_j'|^2 + |Z_j|^2) + Z_j'^* Z_j\right] \\ \langle -Z_j' | -Z_j \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|Z_j'|^2 + |Z_j|^2) + Z_j'^* Z_j\right] \\ \langle -Z_j' | Z_j \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|Z_j'|^2 + |Z_j|^2) - Z_j'^* Z_j\right] \\ \langle Z_j' | -Z_j \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|Z_j'|^2 + |Z_j|^2) - Z_j'^* Z_j\right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} |\{Z_j\}\rangle_q &= |Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_{q-1}, Z_q\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^q |Z_j|^2\right]\right\} \cdot \sum_{n_j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^q \frac{Z_j^{n_j}}{n_j!} \right\} |\{n_j\}\rangle_q \\ | \{-Z_j\} \rangle_q &= | -Z_1, -Z_2, \dots, -Z_j, \dots, -Z_{q-1}, -Z_q \rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^q |Z_j|^2\right]\right\} \cdot \sum_{n_j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^q \frac{(-Z_j)^{n_j}}{n_j!} \right\} |\{n_j\}\rangle_q \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 $|\{n_j\}\rangle_q = |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_{q-1}, n_q\rangle$, $\{n_j\} = n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_{q-1}, n_q$

$$\left. \begin{aligned} a_j |\{Z_j\}\rangle_q &= Z_j |\{Z_j\}\rangle_q \\ a_j | \{-Z_j\} \rangle_q &= -Z_j | \{-Z_j\} \rangle_q \\ \left[\prod_{j=1}^q a_j \right] |\{Z_j\}\rangle_q &= \left[\prod_{j=1}^q Z_j \right] |\{Z_j\}\rangle_q \\ \left[\prod_{j=1}^q a_j \right] | \{-Z_j\} \rangle_q &= (-1)^q \cdot \left[\prod_{j=1}^q Z_j \right] | \{-Z_j\} \rangle_q \\ \left[\prod_{j=1}^q a_j^N \right] |\{Z_j\}\rangle_q &= \left[\prod_{j=1}^q Z_j^N \right] |\{Z_j\}\rangle_q \\ \left[\prod_{j=1}^q a_j^N \right] | \{-Z_j\} \rangle_q &= (-1)^{qN} \cdot \left[\prod_{j=1}^q Z_j^N \right] | \{-Z_j\} \rangle_q \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \{Z_j'\} | \{Z_j\} \rangle_q &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^q \left[-\frac{1}{2} (|Z_j|^2 + |Z_j'|^2) + Z_j'^* \cdot Z_j \right] \right\} \\ \langle \{-Z_j'\} | \{-Z_j\} \rangle_q &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^q \left[-\frac{1}{2} (|Z_j|^2 + |Z_j'|^2) + Z_j'^* \cdot Z_j \right] \right\} \\ \langle \{-Z_j'\} | \{Z_j\} \rangle_q &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^q \left[-\frac{1}{2} (|Z_j|^2 + |Z_j'|^2) - Z_j'^* \cdot Z_j \right] \right\} \\ \langle \{Z_j'\} | \{-Z_j\} \rangle_q &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^q \left[-\frac{1}{2} (|Z_j|^2 + |Z_j'|^2) - Z_j'^* \cdot Z_j \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在此, $a_j (j=1, 2, 3, \dots, q)$ 为第 j 模光场的光子湮没算符, q 为光场的腔模(纵模)总数. 另外, 我们研究的两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$, 其正交归一条件要求

$$\langle \Psi^2 | \Psi^2 \rangle_q = (r_{pq}^{(R)2} + r_{nq}^{(R)2}) = 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos[\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}] \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_{ij}^2 \right] \right\} = 1 \quad (9)$$

式中 $\Delta \theta_n^{(R)} = \theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}$ 为多模相干态 $|Z_j\rangle_q$ 及其相反态 $|\{-Z_j\}\rangle_q$ 这两者之间的初始相位差.

2 第一种非线性高阶压缩效应——Y 次方 Y 压缩

2.1 N 次方 Y 压缩的定义²⁰

考虑频率为 $\omega (j=1, 2, 3, \dots, q)$ 的多模辐射场, 以 $a_j^+, a_j (j=1, 2, 3, \dots, q)$ 分别表示第 j 模光场的产生及湮没算符, 则在相互作用绘景中 $a_j^+(t) = \exp[-i\omega t] a_j^+(0)$ 和 $a_j(t) = \exp[i\omega t] a_j(0)$. 令 $a_j^+(0) = a_j^+, a_j(0) = a_j$, 则 a_j^+, a_j 满足下列对易关系:

$$\left. \begin{aligned} [a_j, a_j^+] &= a_j a_j^+ - a_j^+ a_j = \delta_{jj} = \begin{cases} 1 & (j=j) \\ 0 & (j \neq j) \end{cases} \\ [a_j^N, a_j^{+N}] &= a_j^N a_j^{+N} - a_j^{+N} a_j^N = \begin{cases} [a_j^N, a_j^{+N}] & (j=j) \\ 0 & (j \neq j) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

定义两个厄密共轭算符

$$\left. \begin{aligned} A_q^+(N) &= -\frac{1}{q} \sum_{j=1}^q a_j^{+N} \\ A_q(N) &= -\frac{1}{q} \sum_{j=1}^q a_j^N \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} A_q^+(N) &= [A_q(N)]^+ \\ A_q(N) &= [A_q^+(N)]^+ \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

和

$$\left. \begin{aligned} [A_q(1), A_q^+(1)] &= 1 \\ [A_q(N), A_q^+(N)] &= A_q(N) A_q^+(N) - A_q^+(N) A_q(N) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q [a_j^N, a_j^{+N}] \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

再定义两个正交厄密算符(可测量) $Y^I(N)$ 和 $Y^Z(N)$

$$\left. \begin{aligned} Y^I(N) &= \frac{1}{2} [A_q^+(N) + A_q(N)] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q (a_j^{+N} + a_j^N) \\ Y^Z(N) &= \frac{i}{2} [A_q^+(N) - A_q(N)] = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^q (a_j^{+N} - a_j^N) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} [Y^I(N)]^+ &= Y^I(N) \\ [Y^Z(N)]^+ &= Y^Z(N) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

和

$$[Y^I(N), Y^Z(N)] = \frac{i}{2} [A_q(N), A_q^+(N)] = \frac{i}{2q} \sum_{j=1}^q [a_j^N, a_j^{+N}] \quad (15)$$

于是,利用 Chuchy-Schwartz 不等式可导出下列测不准关系式^{20~21}

$$\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle \geq \frac{1}{16} |\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle|^2 \quad (16)$$

式中 $\langle \Delta Y_m^2(N)_q \rangle = \langle [Y_m^q(N)]^2 \rangle - \langle Y_m^q(N) \rangle^2$, ($m=1, 2$).

式(16)可进一步改写为

$$\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle > \frac{1}{16} |\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle|^2 \quad (17a)$$

$$\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle = \frac{1}{16} |\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle|^2 \quad (17b)$$

①如果

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle &< \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \\ \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle &> \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} 4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle &< 0 \\ 4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle$ 这两者之积满足式(17a), 则称多模辐射场的第 1 正交分量存在任意阶的 N 次方 Y 压缩效应.

②如果

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle &> \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \\ \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle &< \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} 4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle &> 0 \\ 4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle$ 这两者之积满足式(17a), 则称多模辐射场的第 2 正交分量存在任意阶的 N 次方 Y 压缩效应.

③如果

$$\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle = \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle = \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \quad (20a)$$

或者

$$4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle = 4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle = 0 \quad (20b)$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle$ 这两者之积满足式(17b), 则称多模辐射场处在 N - Y 最小测不准态.

④如果

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle &< \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \\ \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle &> \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \end{aligned} \right\}$$

或者

$$\left. \begin{aligned} 4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle &< 0 \\ 4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle &> 0 \end{aligned} \right\}$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle$ 这两者之积满足式(17b), 则称多模辐射场的第 1 正交分量处于 N - Y 压缩最小测不准态.

⑤如果

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle &> \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \\ \langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle &< \frac{1}{4} \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \end{aligned} \right\}$$

或者

$$\left. \begin{aligned} 4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle &< -\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle > 0 \\ 4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle &< -\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle < 0 \end{aligned} \right\}$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle$ 这两者之积满足式 (17b), 则称多模辐射场的第 2 正交分量处于 N - Y 压缩最小测不准态.

2.2 态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的 N 次方 Y 压缩

对于两态叠加多模叠加态 $|\Psi^2\rangle_q$, 根据式 (1) ~ (9) 及式 (11) ~ (17), 经过大量的繁复计算即可求得

$$\begin{aligned} &4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle < -\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle > \\ &= \frac{1}{q} \left\{ 2\langle \sum_{j,j=1}^q a_j^{+N} a_j^N \rangle + \langle \sum_{j,j=1}^q (a_j^{+N} a_j^{+N} + a_j^N a_j^N) \rangle - \langle \sum_{j=1}^q (a_j^{+N} + a_j^N) \rangle^2 \right\} \\ &= \frac{1}{q} \left\{ 2\sum_{j=1}^q R_j^{2N} + 2\sum_{j=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} \left\{ R_j^N R_j^N \cos[N(\varphi - \varphi_j)] \right\} \right\} \cdot \left\{ \left(r_{pq}^{(R)2} + r_{nq}^{(R)2} \right) \right. \\ &\quad + (-1)^N \cdot 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos[\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_q^{(R)}] \exp\left\{ -2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \left. + 2\left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2N} \cos[2N\varphi] \right\} \right. \\ &\quad + 2\sum_{j=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} \left\{ R_j^N R_j^N \cos[N(\varphi + \varphi_j)] \right\} \left. - \left\{ 2\left\{ \sum_{j=1}^q R_j^N \cos[N\varphi] \right\} \right\} \cdot \left\{ r_{pq}^{(R)2} + (-1)^N \cdot r_{nq}^{(R)2} \right\} \right. \\ &\quad + 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \exp\left\{ -2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^N \cos[N\varphi + (\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_q^{(R)})] \right\} \right\} \\ &\quad \left. + (-1)^N \cdot \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^N \cos[N\varphi - (\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_q^{(R)})] \right\} \right\} \left. \right\}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle < -\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle > \\ &= \frac{1}{q} \left\{ 2\langle \sum_{j,j=1}^q a_j^{+N} a_j^N \rangle - \langle \sum_{j,j=1}^q (a_j^{+N} a_j^{+N} + a_j^N a_j^N) \rangle + \langle \sum_{j=1}^q (a_j^{+N} - a_j^N) \rangle^2 \right\} \\ &= \frac{1}{q} \left\{ 2\left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2N} + 2\sum_{j=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} \left\{ R_j^N R_j^N \cos[N(\varphi - \varphi_j)] \right\} \right\} \cdot \left\{ \left(r_{pq}^{(R)2} + r_{nq}^{(R)2} \right) \right. \right. \\ &\quad + (-1)^N \cdot 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos[\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_q^{(R)}] \exp\left\{ -2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \left. - 2\left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2N} \cos[2N\varphi] \right\} \right. \\ &\quad + 2\sum_{j=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} \left\{ R_j^N R_j^N \cos[N(\varphi + \varphi_j)] \right\} \left. - \left\{ 2\left\{ \sum_{j=1}^q R_j^N \sin[N\varphi] \right\} \right\} \cdot \left\{ r_{pq}^{(R)2} + (-1)^N \cdot r_{nq}^{(R)2} \right\} \right. \\ &\quad + 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \exp\left\{ -2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^N \sin[N\varphi + (\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_q^{(R)})] \right\} \right\} \\ &\quad \left. + (-1)^N \cdot \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^N \sin[N\varphi - (\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_q^{(R)})] \right\} \right\} \left. \right\}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

2.2.1 考虑 N 为偶数的情形

若 $N = 2p$ ($p = 1, 2, 3, \dots$), 则式 (21) 和式 (22) 可被约化为

$$\begin{aligned} &4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle < -\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle > \\ &= \frac{2}{q} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{4p} + 2\sum_{j=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} \left\{ R_j^{2p} R_j^{2p} \cos[2p(\varphi - \varphi_j)] \right\} + \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{4p} \cos[4p\varphi] \right\} \right. \\ &\quad + 2\sum_{j=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} \left\{ R_j^{2p} R_j^{2p} \cos[2p(\varphi + \varphi_j)] \right\} \left. - 2\left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2p} \cos[2p\varphi] \right\} \right\}^2 \right\} \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle < -\langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle >$$

$$= \frac{2}{q} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{4p} + 2\sum_{j=j+1}^q \sum_{j=1}^{q-1} \left\{ R_j^{2p} R_j^{2p} \cos[2p(\varphi - \varphi_j)] \right\} - \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{4p} \cos[4p\varphi] \right\} \right\}$$

$$-2 \sum_{j=p'+1}^q \sum_{j=1}^{p'-1} \left\{ R_j^{2p} R_j^{2p} \cos[2p(\varphi + \varphi_j)] \right\} - 2 \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2p} \sin[2p\varphi] \right\} \right\}^2 \quad (24)$$

可见, 当 N 取偶数时, 多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 恒处于 N -Y 最小测不准态.

2.2.2 考虑 N 为奇数的情形

若 $N = 2p' + 1$ ($p' = 0, 1, 2, \dots$), 则式(21)和式(22)可被化成

$$\begin{aligned} 4 < \Delta Y_1^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] > \\ &= \frac{2}{q} \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2(2p'+1)} + 2 \sum_{j=p'+1}^q \sum_{j=1}^{p'-1} \left\{ R_j^{2p'+1} R_j^{2p'+1} \cos[(2p'+1)(\varphi - \varphi_j)] \right\} \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - 4r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos[\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_{nq}^{(R)}] \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\} \\ &\quad + \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2(2p'+1)} \cos[2(2p'+1)\varphi] \right\} + 2 \sum_{j=p'+1}^q \sum_{j=1}^{p'-1} \left\{ R_j^{2p'+1} R_j^{2p'+1} \cos[(2p'+1)(\varphi + \varphi_j)] \right\} \right\} \\ &\quad - 2 \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2p'+1} \cos[(2p'+1)\varphi] \right\} \right\} \cdot \left\{ r_{pq}^{(R)2} - r_{nq}^{(R)2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \sin[\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_{nq}^{(R)}] \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2p'+1} \sin[(2p'+1)\varphi] \right\} \right\} \right\}^2 \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 < \Delta Y_2^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] > \\ &= \frac{2}{q} \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2(2p'+1)} + 2 \sum_{j=p'+1}^q \sum_{j=1}^{p'-1} \left\{ R_j^{2p'+1} R_j^{2p'+1} \cos[(2p'+1)(\varphi - \varphi_j)] \right\} \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - 4r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos[\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_{nq}^{(R)}] \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2(2p'+1)} \cos[2(2p'+1)\varphi] \right\} + 2 \sum_{j=p'+1}^q \sum_{j=1}^{p'-1} \left\{ R_j^{2p'+1} R_j^{2p'+1} \cos[(2p'+1)(\varphi + \varphi_j)] \right\} \right\} \\ &\quad - 2 \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2p'+1} \sin[(2p'+1)\varphi] \right\} \right\} \cdot \left\{ r_{pq}^{(R)2} - r_{nq}^{(R)2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \sin[\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_{nq}^{(R)}] \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^q \left\{ R_j^{2p'+1} \cos[(2p'+1)\varphi] \right\} \right\} \right\}^2 \quad (26) \end{aligned}$$

假定 $r_{pq}^{(R)}$ 、 $r_{nq}^{(R)}$ 和 R_j ($j = 1, 2, 3, \dots, q$) 等均为有限的正实数, 则当 N 为奇数亦即 $N = 2p' + 1$ ($p' = 0, 1, 2, 3, \dots$) 时, 态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的非线性高阶压缩特性可从以下两方面进行讨论:

1) 第 1 正交分量的压缩情况

如果 $\varphi(j = 1, 2, 3, \dots, q)$ 满足条件

$$\varphi = \pm(2k\varphi + 1) \cdot \frac{\pi}{2(2p'+1)} \left\{ \begin{array}{l} p' = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots \\ k\varphi = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots \\ j = 1, 2, 3, \dots, \dots, q \end{array} \right\} \quad (27)$$

Ⓐ 当 $\vartheta_q^{(R)} - \vartheta_{nq}^{(R)} = \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) 时,

$$4 < \Delta Y_1^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] > = -\frac{8}{q} r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2p'+1} \right\}^2 \cdot \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0 \quad (28a)$$

$$4 < \Delta Y_2^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] > > 0 \quad (28b)$$

这就表明, 在这种情况下, 多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量存在着任意阶的 N 次方 Y 压缩效应; 第 2 正交分量则不出现压缩. 由式(28a)可知, 第 1 正交分量的 N 次方 Y 压缩与腔模总数 q 非线性相关、与 R_j 非线性相关、与 p' 或者压缩阶数 N 非线性相关、与 $r_{pq}^{(R)}$ 及 $r_{nq}^{(R)}$ 两者之积成正比, 并随上述诸参量的变化而改变. 由式(28a)还可以看出, 对于 p' ($p' = 0, 1, 2, 3, \dots$) 的不同取值, 压缩阶数 $N = 2p' + 1$ ($N = 1, 3, 5, 7, \dots$) 的取值情况各不相同; 与之相应, 态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量被压缩的程

度和深度也各不相同·各不同阶的 N 次方 Y 压缩效应既互相独立,又可同时出现·

另外,需要指出的是,式(27)所表征的是两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 中不同模之间的相位所应满足的量子化条件;这个量子化条件集中反映了态 $|\Psi^2\rangle_q$ 中不同模之间的非经典量子关联性和模间的竞存效应,它是多模光场中不同模之间的量子相干性的一种具体表现·而 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2k\pi$ 则表示两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 中不同量子态之间的相位所应满足的量子化条件;这个量子化条件表明,组成态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的、宏观可分辨的不同量子态之间存在着明显的量子干涉效应,它是多模叠加态光场中不同态之间的量子相干性的一种具体体现·

可见,两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 中,不同模之间的量子相干性(即不同模之间的非经典量子关联性和模间竞争效应)以及不同量子态之间的量子相干性(即态间的量子干涉效应),是导致态 $|\Psi^2\rangle_q$ 中存在周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩效应的本质原因·

⑤ 当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm(2k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时

$$4\langle\Delta Y_1^2(N)_q\rangle - \langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle > \\ = -\frac{16}{q} r_{pq}^{(R)2} r_{nq}^{(R)2} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2p+1} \right\}^2 \cdot \exp\left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0 \quad (29a)$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle - \langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle > 0 \quad (29b)$$

这再次表明:在这种情况下,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量确实存在着任意阶的 N 次方 Y 压缩效应;第 2 正交分量仍然不出现压缩·与式(28a)不同,在式(29a)中,第 1 正交分量的 N 次方 Y 压缩效应不仅与腔模总数 q 非线性相关、与 R_j 非线性相关、与 p 或者压缩阶数 N 非线性相关,而且还与 $r_{pq}^{(R)}$ 及 $r_{nq}^{(R)}$ 这两者之间非线性相关(即与 $r_{pq}^{(R)2} \cdot r_{nq}^{(R)2}$ 成正比)·

⑥ 当且仅当 $r_{pq}^{(R)2} + r_{nq}^{(R)2} = 1/2$, 即

$$1 - 4r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos[\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}] \exp\left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} = 0 \quad (30a)$$

亦即

$$\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \cos^{-1} \left\{ \frac{\exp\left[2 \left(\sum_{j=1}^q R_j^2 \right) \right]}{4r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)}} \right\} \quad (30b)$$

时

$$4\langle\Delta Y_1^2(N)_q\rangle - \langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle = -\frac{1}{q} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2p+1} \right\}^2 \cdot \\ \left\{ 1 + 16r_{pq}^{(R)2} r_{nq}^{(R)2} \exp\left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\} < 0 \quad (31a)$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle - \langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle > 0 \quad (31b)$$

这进一步表明,在这种情况下,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量的确存在着任意阶的 N 次方 Y 压缩效应;这种非线性的高阶压缩效应正是通过式(31a)这一典型的非线性关系而得以体现的·

2) 第 2 正交分量的压缩情况

如果 $\Phi(j=1, 2, 3, \dots, q)$ 满足条件

$$\Phi = \pm k\Phi \cdot \pi/(2p+1) \begin{Bmatrix} p'=0, 1, 2, 3, \dots, \dots \\ k\Phi=0, 1, 2, 3, \dots, \dots \\ j=1, 2, 3, \dots, \dots, q \end{Bmatrix} \quad (32)$$

⑦ 当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2k\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时

$$4\langle\Delta Y_1^2(N)_q\rangle - \langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle > 0 \quad (33a)$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle - \langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle = -\frac{8}{q} r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2p+1} \right\}^2 \cdot \exp\left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0$$

这表明,在这种情况下,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 2 正交分量存在着任意阶的 N 次方 Y 压缩效应;第 1 正交分量不存在压缩.此外,我们还可以看出,由式(33b)所表征的第 2 正交分量以及由式(28a)所表征的第 1 正交分量两者具有完全相同的压缩;这说明第 1、2 两个正交分量的压缩情况互补,但压缩条件不同.两者具有相同压缩时的相位相差为

$$\Delta\varphi = \pm\pi[2(p+1)] \quad (34a)$$

$$\Delta(\Theta_q^{(R)} - \Theta_q^{(I)}) = 0 \quad (34b)$$

可见两者的态间压缩条件相同,而模间压缩条件不同.另外, $\Delta\varphi$ 只与 p 即压缩阶数 N 有关,而与量子数 k 无关.这说明两者在模间压缩条件上的差别,主要由 p 即压缩阶数 N 所产生、并随 p 即 N 的变化而改变.

⑤当 $\Theta_q^{(R)} - \Theta_q^{(I)} = \pm(2k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时

$$4 < \Delta Y_1^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] > > 0 \quad (35a)$$

$$4 < \Delta Y_2^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] >$$

$$= -\frac{16}{q} r_{pq}^{(R)2} r_{nq}^{(R)2} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2p+1} \right\}^2 \cdot \exp \left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0 \quad (35b)$$

这又表明:在这种情况下,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 2 正交分量确实存在任意阶的 N 次方 Y 压缩效应.式(35b)与式(29a)中,两者的压缩情况相同,它们呈现周期性互补的、相同压缩时的相位相差与式(34a)和式(34b)相同.

⑥当且仅当 $\Theta_q^{(R)} - \Theta_q^{(I)}$ 满足式(30b)时

$$4 < \Delta Y_1^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] > > 0 \quad (36a)$$

$$4 < \Delta Y_2^2(N)_q > - < [A_q(N), A_q^+(N)] >$$

$$= -\frac{1}{q} \left\{ \sum_{j=1}^q R_j^{2p+1} \right\}^2 \cdot \left\{ 1 + 16 r_{pq}^{(R)2} r_{nq}^{(R)2} \exp \left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\} < 0 \quad (36b)$$

这就充分表明,在这一特定条件下,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 2 正交分量确实存在着任意阶的 N 次方 Y 压缩.式(36b)与式(31a)这两者之间的压缩情况亦完全相同.两者呈现相同压缩时的相位相差也与式(34a)和式(34b)相同.

3 第二种非线性高阶压缩效应—— N 次方 H 压缩

3.1 N 次方 H 压缩的定义²⁰

定义两个厄密共轭算符

$$\left. \begin{aligned} B_q^+(N) &= \sum_{j=1}^q a_j^{+N} \\ B_q(N) &= \sum_{j=1}^q a_j^N \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} [B_q^+(N)]^+ &= B_q(N) \\ [B_q(N)]^+ &= B_q^+(N) \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

$B_q^+(N)$ 、 $B_q(N)$ 满足对易关系

$$[B_q(N), B_q^+(N)] = \left[\sum_{j=1}^q a_j^N, \sum_{j=1}^q a_j^{+N} \right] \quad (38b)$$

再定义两个正交厄密算符(即再定义两个可测量) $H^I(N)$ 和 $H^II(N)$, 则有

$$\left. \begin{aligned} H^I(N) &= \frac{1}{2} [B_q^+(N) + B_q(N)] = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^q a_j^{+N} + \sum_{j=1}^q a_j^N \right] \\ H^II(N) &= \frac{i}{2} [B_q^+(N) - B_q(N)] = \frac{i}{2} \left[\sum_{j=1}^q a_j^{+N} - \sum_{j=1}^q a_j^N \right] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} [H^1(N)]^+ &= H^1(N) \\ [H^2(N)]^+ &= H^2(N) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$H^1(N)$ 和 $H^2(N)$ 满足对易关系

$$[H^1(N), H^2(N)] = \frac{i}{2} [B_q(N), B_q^+(N)] = \frac{i}{2} \left[\sum_{j=1}^q a_j^N, \sum_{j=1}^q a_j^{+N} \right] \quad (41)$$

因此, 利用 Cauchy-Schwartz 不等式可导出下列测不准关系式^{20~21}

$$\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle \geq \frac{1}{16} |\langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle|^2 \quad (42)$$

式中 $\langle \Delta H_m^2(N)_q \rangle = \langle [H_m^q(N)]^2 \rangle - \langle H_m^q(N) \rangle^2$, ($m=1, 2$).

式(42)可改写成

$$\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle > \frac{1}{16} |\langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle|^2 \quad (43a)$$

$$\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle = \frac{1}{16} |\langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle|^2 \quad (43b)$$

①如果

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle &< \frac{1}{4} \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \\ \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle &> \frac{1}{4} \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \end{aligned} \right\} \quad (44a)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} 4 \langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle &< 0 \\ 4 \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (44b)$$

并且 $\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle$ 两者之积满足式(43a), 则称多模辐射场的第 1 正交分量存在任意阶的 N 次方 H 压缩效应.

②如果

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle &> \frac{1}{4} \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \\ \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle &< \frac{1}{4} \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \end{aligned} \right\} \quad (45a)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} 4 \langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle &> 0 \\ 4 \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

并且 $\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle$ 两者之积满足式(43a), 则称多模辐射场的第 2 正交分量存在任意阶的 N 次方 H 压缩效应.

③如果

$$\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle = \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle = \frac{1}{4} \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \quad (46a)$$

或者

$$4 \langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle = 4 \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle = 0 \quad (46b)$$

并且 $\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle$ 两者之积满足式(43b), 则称多模辐射场处于 N -H 最小测不准态.

④如果

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle &< \frac{1}{4} \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \\ \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle &> \frac{1}{4} \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \end{aligned} \right\}$$

或者

$$\left. \begin{aligned} 4 \langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle &< 0 \\ 4 \langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle &> 0 \end{aligned} \right\}$$

且 $\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle$ 之积满足式(43b), 则称多模辐射场的第 1 正交分量处于 N -H 压缩

最不测不准态.

⑤如果

$$\left. \begin{aligned} &<\triangle H_1^2(N)_q>>\frac{1}{4}<[B_q(N), B_q^+(N)]> \\ &<\triangle H_2^2(N)_q><\frac{1}{4}<[B_q(N), B_q^+(N)]> \end{aligned} \right\}$$

或者

$$\left. \begin{aligned} &4<\triangle H_1^2(N)_q>-<[B_q(N), B_q^+(N)]>>0 \\ &4<\triangle H_2^2(N)_q>-<[B_q(N), B_q^+(N)]><0 \end{aligned} \right\}$$

并且 $<\triangle H_1^2(N)_q>$ 与 $<\triangle H_2^2(N)_q>$ 两者之积满足式(43b), 则称多模辐射场的第2正交分量处于N-H压缩最小测不准态.

3.2 态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的N次方H压缩

对于两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$, 根据式(1)~(9)以及式(37)~(43), 经过大量的繁复计算同理可得

$$\begin{aligned} &4<\triangle H_1^2(N)_q>-<[B_q(N), B_q^+(N)]> \\ &=2<\sum_{j,j'=1}^q a_j^{+N} a_j^N>+<\sum_{j,j'=1}^q a_j^{+N} a_j^{+N}+\sum_{j,j'=1}^q a_j^N a_j^N>-<\sum_{j=1}^q a_j^{+N}+\sum_{j'=1}^q a_j^N>^2 \\ &=2\left[\sum_{j=1}^q R_j^{2N}\right] \cdot \left\{\left\langle r_{pq}^{(R)2}+r_{nq}^{(R)2}\right\rangle+(-1)^{qN} \cdot 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos\left[\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)}\right] \exp\left\{-2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.+\left\langle r_{pq}^{(R)2}+r_{nq}^{(R)2}\right\rangle \cdot \cos\left\{2N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.+2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos\left[\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)}\right] \cos\left\{2N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]\right\} \exp\left\{-2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.-2\left\langle r_{pq}^{(R)2}+(-1)^{qN} \cdot r_{nq}^{(R)2}\right\rangle \cos\left\{N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.+\exp\left\{-2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2\right]\right\} \cdot\left\{r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos\left\{N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]+(\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)})\right\}\right.\right. \\ &\quad \left.+\left(-1\right)^{qN} \cdot r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos\left\{N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]-\left(\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)}\right)\right\}\right\}\right\}^2 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} &4<\triangle H_2^2(N)_q>-<[B_q(N), B_q^+(N)]> \\ &=2<\sum_{j,j'=1}^q a_j^{+N} a_j^N>-<\sum_{j,j'=1}^q a_j^{+N} a_j^{+N}+\sum_{j,j'=1}^q a_j^N a_j^N>+<\sum_{j=1}^q a_j^{+N}-\sum_{j'=1}^q a_j^N>^2 \\ &=2\left[\sum_{j=1}^q R_j^{2N}\right] \cdot \left\{\left\langle r_{pq}^{(R)2}+r_{nq}^{(R)2}\right\rangle+(-1)^{qN} \cdot 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos\left[\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)}\right] \exp\left\{-2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.-\left\langle r_{pq}^{(R)2}+r_{nq}^{(R)2}\right\rangle \cos\left\{2N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.-2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos\left[\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)}\right] \cos\left\{2N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]\right\} \exp\left\{-2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.-2\left\langle r_{pq}^{(R)2}+(-1)^{qN} r_{nq}^{(R)2}\right\rangle \sin\left\{N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]\right\}\right. \\ &\quad \left.+\exp\left\{-2\left[\sum_{j=1}^q R_j^2\right]\right\} \cdot\left\{r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \sin\left\{N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]+(\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)})\right\}\right.\right. \\ &\quad \left.+\left(-1\right)^{qN} \cdot r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \sin\left\{N\left[\sum_{j=1}^q \Phi\right]-\left(\theta_{pq}^{(R)}-\theta_{nq}^{(R)}\right)\right\}\right\}\right\}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

3.2.1 考虑 qN 为偶数的情形

若 $qN=2p$ ($p=1, 2, 3, \dots$), 则压缩阶数 N 满足

$$N=2(p/q) \quad (49)$$

这时式(47)和式(48)可化为

$$4\langle\triangle H_1^2(N)_q\rangle - \langle[B_q(N), B_q^+(N)]\rangle \equiv 0 \quad (50a)$$

$$4\langle\triangle H_2^2(N)_q\rangle - \langle[B_q(N), B_q^+(N)]\rangle \equiv 0 \quad (50b)$$

可见当 qN 取偶数时,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 恒处于 N -H 最小测不准态.在此, qN 取偶数具有以下三方面的意义:第一,它要求腔模总数 q 取偶,压缩阶数 N 取奇;第二,它要求腔模总数 q 取奇,压缩阶数 N 取偶;第三,它要求腔模总数 q ,压缩阶数 N 同为偶数.由此可见, N -H 最小测不准态不仅对腔模总数 q 、压缩阶数 N 有具体的限定,而且对两者之积 $q \cdot N$ 的取值搭配也有严格的限定(式(49)).这就是 N -H 最小测不准态与 N -Y 最小测不准态两者之间的一个重要区别.

3.2.2 考虑 qN 为奇数的情形

若 qN 为奇数,则应满足条件

$$qN = 2p' + 1 \quad (p' = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots) \quad (51a)$$

或者

$$N = (1/q)(2p' + 1) \quad (p' = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots) \quad (51b)$$

这就要求腔模总数 q 和压缩阶数 N 两者必须同为奇数,且应满足式(51a)或(51b).在这种情况下,式(47)和式(48)可化为

$$\begin{aligned} & 4\langle\triangle H_1^2(N)_q\rangle - \langle[B_q(N), B_q^+(N)]\rangle \\ &= 2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p'+1)}{q}} \right] \cdot \left\{ 1 + \cos \left\{ \frac{2(2p'+1)}{q} \left[\sum_{j=1}^q \Phi \right] \right\} \right. \\ & \quad - 4r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos \left[\Theta_{pq}^{(R)} - \Theta_{nq}^{(R)} \right] \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} - 2 \left\{ \left(r_{pq}^{(R)2} - r_{nq}^{(R)2} \right) \cos \left\{ \frac{2p'+1}{q} \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right. \\ & \quad \left. \left. - 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \sin \left[\Theta_{pq}^{(R)} - \Theta_{nq}^{(R)} \right] \sin \left\{ \frac{2p'+1}{q} \left[\sum_{j=1}^q \Phi \right] \right\} \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\}^2 \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & 4\langle\triangle H_2^2(N)_q\rangle - \langle[B_q(N), B_q^+(N)]\rangle \\ &= 2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p'+1)}{q}} \right] \cdot \left\{ 1 - \cos \left\{ \frac{2(2p'+1)}{q} \left[\sum_{j=1}^q \Phi \right] \right\} \right. \\ & \quad - 4r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \cos \left[\Theta_{pq}^{(R)} - \Theta_{nq}^{(R)} \right] \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} - 2 \left\{ \left(r_{pq}^{(R)2} - r_{nq}^{(R)2} \right) \sin \left\{ \frac{2p'+1}{q} \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right. \\ & \quad \left. \left. + 2r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \sin \left[\Theta_{pq}^{(R)} - \Theta_{nq}^{(R)} \right] \cos \left\{ \frac{2p'+1}{q} \left[\sum_{j=1}^q \Phi \right] \right\} \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\}^2 \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

1) 第 1 正交分量的压缩情况

如果 $\Phi(j=1, 2, 3, \dots, q)$ 满足条件

$$\sum_{j=1}^q \Phi = \pm (2k_\Phi + 1) \cdot \frac{q\pi}{2(2p'+1)} \left(\begin{array}{l} p' = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots \\ k_\Phi = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots \\ j = 1, 2, 3, \dots, \dots, q \end{array} \right) \quad (54)$$

Ⓐ 当 $\Theta_{pq}^{(R)} - \Theta_{nq}^{(R)} = \pm 2k_\Theta \pi$ ($k_\Theta = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots$) 时

$$4\langle\triangle H_1^2(N)_q\rangle - \langle[B_q(N), B_q^+(N)]\rangle = -8r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \left[\sum_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p'+1)}{q}} \right] \cdot \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0 \quad (55a)$$

$$4\langle\triangle H_2^2(N)_q\rangle - \langle[B_q(N), B_q^+(N)]\rangle > 0 \quad (55b)$$

这就表明,在这种情况下,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量存在着任意阶的 N 次方 H 压缩效应;第 2 正交分量不出现压缩.式(55a)所表征的态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量的 N 次方 H 压缩效应,也与腔模总数 q 、 R_j 以及压缩阶数 N 等非线性相关,与 $r_{pq}^{(R)} \cdot r_{nq}^{(R)}$ 成正比.与式(28a)相比,式(55a)所具有的这种非线性相关更强.此外,由式(55a)还可以看出,各不同阶的 N 次方 H 压缩效应既互相独立,又可同时出现.态 $|\Psi^2\rangle_q$ 中,不同模之间的非经典量子关联性、模间竞存效应以及不同量子态之间的量子干涉的存在,是导致态 $|\Psi^2\rangle_q$ 中存在周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应的根本原因.

⑤ 当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2(k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时

$$4\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle = -16 \left[\prod_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p+1)}{q}} \right] r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \exp \left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0 \quad (56a)$$

$$4\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle > 0 \quad (56b)$$

这再次表明,在这种情况下,多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量存在着任意阶的 N 次方 H 压缩效应.

⑥ 当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}$ 满足条件 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \arccos \left\{ \frac{\exp \left[2 \left(\sum_{j=1}^q R_j^2 \right) \right]}{4 r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)}} \right\}$ 时

$$4\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle = - \left[\prod_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p+1)}{q}} \right] \cdot \left\{ 1 + 16 r_{pq}^{(R)2} r_{nq}^{(R)2} \exp \left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\} < 0 \quad (57a)$$

$$4\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle > 0 \quad (57b)$$

式(57a)再次显示出多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量的确存在着任意阶的 N 次方 H 压缩效应.

2) 第 2 正交分量的压缩情况

如果 $\varphi(j=1, 2, 3, \dots, q)$ 满足条件

$$\sum_{j=1}^q \varphi = \pm k\pi \cdot \frac{q\pi}{2p+1} \left\{ \begin{array}{l} p = 0, 1, 2, 3, \dots \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ j = 1, 2, 3, \dots, q \end{array} \right\} \quad (58)$$

⑦ 当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2k\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时

$$4\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle > 0 \quad (59a)$$

$$4\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle = -8 \left[\prod_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p+1)}{q}} \right] r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \exp \left\{ -2 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0 \quad (59b)$$

式(59b)表明,在这种情况下,多模叠加态光场的第 2 正交分量存在着任意阶的 N 次方 H 压缩效应;第 1 正交分量不存在压缩效应. 式(59b)与式(55a)两者的压缩情况相同,它们呈现周期性互补的、相同压缩时的相位相差为

$$\Delta \left[\sum_{j=1}^q \varphi \right] = \pm \frac{q\pi}{2(2p+1)} \quad (60a)$$

$$\Delta(\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}) = 0 \quad (60b)$$

这就表明两者之间的态间压缩条件相同,而模间压缩条件不同. 与式(34a)的情形不同,式(60a)所表征的模间压缩条件不仅与 p 或者压缩阶数 N 有关,而且还与腔模总数 q 有关.

⑧ 当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2(k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时

$$4\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle > 0 \quad (61a)$$

$$4\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle = -16 \left[\prod_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p+1)}{q}} \right] r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)} \exp \left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} < 0 \quad (61b)$$

可见式(61b)与式(56a)的压缩情况相同,且呈周期性的互补关系.

⑨ 当且仅当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \cos^{-1} \left\{ \frac{\exp \left[2 \left(\sum_{j=1}^q R_j^2 \right) \right]}{4 r_{pq}^{(R)} r_{nq}^{(R)}} \right\}$ 时

$$4\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle > 0 \quad (62a)$$

$$4\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle >$$

$$= - \left[\prod_{j=1}^q R_j^{\frac{2(2p+1)}{q}} \right] \cdot \left\{ 1 + 16 r_{pq}^{(R)^2} r_{nq}^{(R)^2} \exp \left\{ -4 \left[\sum_{j=1}^q R_j^2 \right] \right\} \right\} < 0 \quad (62b)$$

4 结论

本文在文献 20 所提出的有关双模及多模辐射场的两种非线性高阶压缩(即 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩)定义的基础上,进一步提出了多模辐射场的 N - Y 最小测不准态、 N - H 最小测不准态、 N - Y 压缩最小测不准态以及 N - H 压缩最小测不准态的定义. 根据量子力学中的线性叠加原理,构造了由多模(q 模)相干态 $|\{z_j\}\rangle_q$ 及其相反态 $|\{-z_j\}\rangle_q$ 的线性叠加所组成的第 I 类两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^2\rangle_q$, 利用文献 20 新近提出的有关双模及多模辐射场的两种非线性高阶压缩的定义,首次对态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的 N 次方 Y 压缩及 N 次 H 压缩效应等进行了详细研究. 结果表明:

1) 当压缩阶数 N 为偶数时,态 $|\Psi^2\rangle_q$ 不存在 N 次方 Y 压缩效应,而是恒处于 N - Y 最小测不准态.

2) 当压缩阶数 N 为奇数时:①如果 $\varphi(j=1, 2, 3, \dots, q)$ 的取值满足式(27),则当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2k\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$, 下同) $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm (2k+1)\pi/2$, 以及 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}$ 的取值满足式(30b)时,态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量皆可呈现出周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩效应.②如果 φ 的取值满足式(32),则当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2k\pi$, $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm (2k+1)\pi/2$ 以及 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}$ 的取值情况满足式(30b)时,态 $|\Psi_{2,1}\rangle_q$ 的第 2 正交分量均可呈现出周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩效应.第 1 正交分量和第 2 正交分量的 N 次方 Y 压缩效应呈现周期性的互补关系;两者呈现周期性互补的、相同压缩时的模间相位相差满足式(34a),态间相位差满足式(34b).

3) 当腔模总数 q 与压缩阶数 N 两者之积 $q \cdot N$ 为偶数时,态 $|\Psi^2\rangle_q$ 不存在 N 次方 H 压缩效应,而是恒处于 N - H 最小测不准态.其中, $q \cdot N$ 为偶数势必要求 q 取偶 N 取奇、 q 取奇 N 取偶、或者 q 和 N 均取偶等;这是 N - H 最小测不准态与 N - Y 最小测不准态之间的一个重要差别.可见, N - H 最小测不准态与 N - Y 最小测不准态,两者在定义上和性质上有着严格的差别.

4) 当腔模总数 q 和压缩阶数 N 均取奇数从而使两者之积 $q \cdot N$ 为奇数时:①如果 φ 的取值满足式(54),则当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2k\pi$, $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm (2k+1)\pi/2$, 以及 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}$ 的取值满足式(30b)时,态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 1 正交分量均可呈现出周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应.②如果 φ 的取值满足式(58),则当 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm 2k\pi$, $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)} = \pm (2k+1)\pi/2$, 以及 $\theta_q^{(R)} - \theta_q^{(R)}$ 的取值满足式(30b)时,态 $|\Psi^2\rangle_q$ 的第 2 正交分量均可呈现出周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应.第 1 正交分量和第 2 正交分量的 N 次方 H 压缩效应也呈现出周期性的互补关系;两者出现周期性互补的相同压缩时的模间相位差满足式(60a),态间相位差满足式(60b).

5) 无论 N 次方 Y 压缩还是 N 次方 H 压缩效应,两者的压缩程度和深度均与腔模总数 q 、压缩阶数 N 、以及压缩参数 $R_j(j=1, 2, 3, \dots, q)$ 等非线性相关;后者与上述参量的非线性关联程度要比前者的更强.这表明 N 次方 H 压缩效应的阶数比 N 次方 Y 压缩效应的阶数更高.各不同阶数的 N 次方 Y 压缩效应和 N 次方 H 压缩效应既互相独立,又可同时存在.

6) 在态 $|\Phi^2\rangle_q$ 中,不同模之间的非经典量子关联性、模间的竞存效应,以及不同量子态之间的量子干涉现象的存在,是导致态 $|\Psi^2\rangle_q$ 中存在着周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩效应的根本原因.

参考文献

- 夏云杰,郭光灿.光场高阶压缩的非经典性与独立性.物理学报,1990,39(17):1070~1074
- 王继锁,王传奎.双光子 Jaynes-Cummings 模型中场的振幅 N 次方压缩.物理学报,1995,44(9):1427~1434
- 詹佑邦.参量放大过程中的振幅 k 次方压缩及其独立性研究.量子电子学,1992,9(3):216~221
- 王继锁,孙金祚,王传奎.光场叠加态的振幅 N 次方压缩.量子电子学,1993,10(2):165~167
- 中国知网. Squeezing properties of coherent states produced in a multiphoton micromaser. Phys Lett(A), 1995, A 202(4):271~278

- 6 Du S D, Gong C D. Squeezing of the k th power of the field amplitude. Phys Lett(A), 1992, A 168(4) :296~300
- 7 Hong C K, Mandel L. Generation of higher-order squeezing of quantum electromagnetic field. Phys Rev(A), 1985, A 32(2) :974~982
- 8 Zhang Z M, Xu Lei, Chai Jinlin, Li Fuli. A new kind of higher-order squeezing of radiation field. Phys Lett(A), 1990, A 150(1) :27~30
- 9 王继锁, 孙金祚, 王传奎, 杨富民. 真空态多光子 Jaynes-Cummings 模型中场的振幅 N 次方压缩. 光学学报, 1993, 13(12) :1096~1099
- 10 刘凤敏, 张学如, 钱妍, 马爱群. 类二项式态的振幅 N 次方压缩特性的研究. 量子光学学报, 1998, 4(1) :14~18
- 11 曾浩生, 曾爱华. $\hat{a}_k$ 本征态的高阶压缩特性. 量子光学学报, 1998, 4(2) :69~77
- 12 姚敏, 许雪梅. 相位相干态的数相高阶压缩. 量子光学学报, 1996, 2(3) :135~142
- 13 路洪. 一类非线性 Jaynes-Cummings 模型中的光场振幅平方压缩. 量子电子学, 1994, 11(1) :40~45
- 14 李高翔, 彭金生. 高 Q Kerr 介质腔中非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中光场的性质. 物理学报, 1993, 42(9) :1443~1451
- 15 詹佑邦. 多光子非线性过程中的振幅平方压缩. 光学学报, 1992, 12(1) :12~15
- 16 何林生. 双光子吸收过程中光场振幅平方压缩. 物理学报, 1991, 40(6) :904~911
- 17 董俊. 光学非简并参量放大过程中的 $SU(1, 1)$ 相干态与光场压缩. 量子电子学. 1993, 10(1) :76~81
- 18 吴锦伟, 郭光灿. 薛定谔猫—宏观量子叠加态. 物理, 1995, 24(5) :269~273
- 19 宋同强, 冯健, 徐炳振, 王文正. 对相干态与两个原子的相互作用过程中原子与场的动力学特性. 物理学报, 1995, 44(9) :1418~1426
- 20 杨志勇, 侯洵. 一种双模叠加态光场的两种非线性高阶压缩效应. 光子学报, 1998, 27(4) :289~299
- 21 杨志勇, 侯洵. 量子体系的时域压缩—频域展宽正、逆效应及其非经典性. 光子学报, 1998, 27(9) :769~777

PROPERTIES OF NONLINEAR HIGHER-ORDER SQUEEZING EFFECTS IN A NEW TYPE OF MULTI-MODE LIGHT FIELD STATE OF SUPERPOSITION STATE WITH DISTINGUISHABLE TWO QUANTUM STATES IN THE KIND (1) *

Hou Xun^{1), 2)}, Yang Zhiyong¹⁾

1) Institute of Photonics & Photon-Technology, and Provincial Key Laboratory of Photoelectronic Technology,
Northwest University, Xi'an, 710069, P. R. China

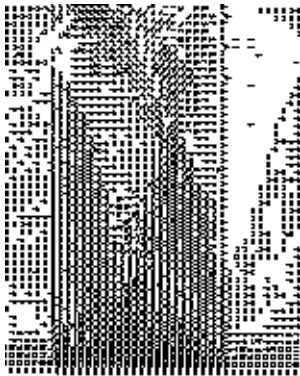
2) Xi'an Institute of Optics & Precision Mechanics, and State Key laboratory of Transient Optical Technology,
the Academy of Sciences of China, Xi'an 710069, P. R. China

Received date: 1998-03-11

Abstract In this paper, a series of new definitions, such as N -Y minimum uncertainty state, N -H minimum uncertainty state, N -Y squeezed minimum uncertainty state and N -H squeezed minimum uncertainty state of multi-mode radiative light field is further suggested by Hou Xun and Yang Zhiyong firstly, that is based upon the definition of both N th power Y-squeezing and N th power H-squeezing proposed in reference [20]. According to the linear superposition principle in quantum mechanics, it is constructed the multi-mode light field state of superposition state with distinguishable

two quantum states in the kind $(| \Phi \rangle >_q$ which is made of linear superposition of multi - mode coherent state $| \{Z_j\} \rangle_q$ and its contrary state $| \{-Z_j\} \rangle_q$. So the two kinds of nonlinear higher-order squeezing effects, both N th power Y-squeezing and N th power H-squeezing, of the state $| \Psi^{(2)} \rangle_q$ is therefore studied in detail by using the definition of nonlinear higher - order squeezing of multi - mode radiative light field which is proposed recently in reference 20. The result shows that 1), when N , the number of squeezing order, is even number, the state $| \Psi^{(2)} \rangle_q$ is always in N -Y minimum uncertainty state; when N is odd number, the state $| \Psi^{(2)} \rangle_q$, under some certain conditions, can present any order N th power Y - squeezing which changes periodically; 2) when $q \cdot N$, the products of cavity modes number and squeezing order number, is even number, the state $| \Psi^{(2)} \rangle_q$ is always in N - H minimum uncertainty state; when $q \cdot N$ is odd number, under some other conditions the state $| \Psi^{(2)} \rangle_q$ can also present any order N -th power H-squeezing that changes periodically; and 3) the depth and degree of both N th power Y-squeezing and N th power H-squeezing are related nonlinearly to the cavity modes number q , to the squeezed parameter R_j , and to the squeezing order number N ; the later is more intensive than the former.

Keywords Superposition state with distinguishable two quantum states; Multi-mode light field state of superposition state; Nonlinear higher-order squeezing effects; N -Y minimum uncertainty state; N -H minimum uncertainty state; N - Y squeezed minimum uncertainty state; N - H squeezed minimum uncertainty state



Hou Xun was born in 1936, graduated from Physics Department of Northwest University of China in 1959 and joined Xi'an Institute of Atomic Energy, Chinese Academy of Sciences. Since 1962 he has been working on High Speed Photography and Photonics at Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, CAS, as a research assistant, associate professor and professor. He studied at Imperial College of London University from 1979 to 1981. His major research areas are image converter high speed photography, image intensifier, generation and measurement of ultrashort laser pulses. He is an academician of China Academy of Sciences.