第 29 卷第 5 期
2000 年 5 月

光 子 学 报
ACTA PHOTONICA SINICA

Vol.29 No.5
May 2000

第Ⅲ及第Ⅳ类两态叠加多模叠加态光场的等阶 N 次方 Y 压缩与等阶 N 次方 H 压缩——兼论"相似压缩"与"压缩简并"现象*

侯 洵[1,2] 杨志勇[1,3] 许定国[1,4] 侯 瑶[5] 孙秀泉[5] 张振杰[1]

(1 西北大学光子学与光子技术研究所,西北大学光电子技术省级重点开放实验室,西安 710069)
(2 中国科学院西安光学精密机械研究所,瞬态光学技术国家重点实验室,西安 710068)
(3 西北大学现代物理研究所,西安 710069)
(4 商洛师专量子光学与量子信息研究所,商洛师专物理系,商州 726000)
(5 西北大学物理学系,西安 710069)

摘 要 本文根据量子力学中的线性叠加原理,分别构造了由多模(即 q 模)相干态 $|\{Z_j\}\rangle_q$ 与多模真空态 $|\{0_j\}\rangle_q$ 以及由多模相干态的相反态 $|\{-Z_j\}\rangle_q$ 与多模真空态 $|\{0_j\}\rangle_q$ 等的线性叠加所组成的第Ⅲ及第Ⅳ类两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 和 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$.利用新近建立的多模压缩态理论,首次对态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩和等阶 N 次方 H 压缩特性进行了详细研究 .结果发现:1) 态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 是两种典型的多模非经典光场,当各模的初始相位 φ_j $(j=1,2,3,\cdots,q)$ 或者各模的初始相位和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 以及态间的初始相位差 $(\theta^{(R)}_{\pm}-\theta^{(0)}_{\pm})$ 等分别满足一些特定的量子化条件时,态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 均可呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应和等阶 N 次方 H 压缩效应;2) 当组成态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的各对应复几率幅不相等亦即 $C^{(R)}_{+}\neq C^{(R)}_{-}$ 和 $C^{(0)}_{+}\neq C^{(0)}_{-}$ 时,态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 这两者的压缩条件和压缩特征虽然相同,但其压缩幅度(即压缩程度和压缩深度)却不相等,这种现象称为"相似压缩";3) 当组成态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的各对应复几率幅相等亦即 $C^{(R)}_{+}=C^{(R)}_{-}$ 和 $C^{(0)}_{+}=C^{(0)}_{-}$ 时,态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 这两种截然不同的多模叠加态光场不仅具有完全相同的压缩条件和压缩特征,而且还具有完全相等的压缩幅度,这种现象就称为"压缩简并" .

关键词 两态叠加;多模叠加态光场;等阶 N 次方 Y 压缩;等阶 N 次方 H 压缩;相似压缩;压缩简并

0 引言

多模压缩态[1~6]与时域/频域压缩态[5~8]理论的建立与发展,已受到国内外的密切关注 .值得一提的是,多模压缩态理论[1~6]一方面将国内外学者提出的有关单、双模压缩态理论[9~13]统一到了自己的理论框架以内,从而为人们进一步开展多模辐射光场的广义非线性等阶与不等阶高阶压缩特性的研究工作提供了一系列行之有效的理论途径;而另一方面,多模压缩态理论的建立,还将为人们进一步开展以多模压缩态作为直接理论基础的多纵模量子光通信领域[14]的理论与技术探索工作提供了重要的理论基础 .特别是,若将多模压缩态理论与三模腔场-两原子系统的非简并三光子相互作用模型[15]、2 度简并 6 光子相互作用模型[16]、任意多光子相互作用模型[17]以及与 q 模腔场-两原子系统的 N_j 度简并任意 N●光子相互作用模型[18]等相结合,通过利用量子信

* 陕西省自然科学基金、陕西省教委专项科研基金和西北大学科学基金资助项目
收稿日期:1999-10-12

息论中有关量子信息熵的概念，则可进一步在多模光场领域深入开展诸如信道容量、自信息量、互信息量、平均互信息量、信码传递速率、量子态的制备与传输、量子信息的储存、提取与识别、量子隐形传态、量子通道的"打开"与"关闭"以及量子计算机的相干与消相干等量子信息学中的若干重大基础与应用问题的研究工作[14,19]；这些都是人们在21世纪急待解决的核心科学技术问题[20].

因此，鉴于多模压缩态在科学技术领域中的重要性和重要作用，我们有必要对各种不同的多模压缩态光场的非经典性质进行深入地研究，以期能有新的突破.

目前，利用多模压缩态理论，人们已分别对四态叠加双模叠加态光场[1]、两态叠加多模叠加态光场[2,21~24]、两态叠加多模 *Schrödinger* 猫态光场[25,26]、多模奇偶相干态光场[27,28]以及多模复共轭奇偶相干态光场[29]等的广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩与等阶 N 次方 H 压缩特性以及等阶 N-Y 最小测不准态和等阶 N-H 最小测不准态进行了详细研究，结果发现了一系列既不同于现有报道又具有重要意义的新结果.

本文根据量子力学中的线性叠加原理，分别构造了由多模相干态 $|\{Z_j\}\rangle_q$ 与多模真空态 $|\{0_j\}\rangle_q$ 这两者的线性叠加所组成第Ⅲ类两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 以及由多模相干态的相反态 $|\{-Z_j\}\rangle_q$ 与多模真空态 $|\{0_j\}\rangle_q$ 这两者的线性叠加所组成的第Ⅳ类两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$. 利用多模压缩态理论，详细研究了态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩与等阶 N 次方 H 压缩特性. 结果发现：态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 是两种典型的多模非经典光场，两者均可呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应和等阶 N 次方 H 压缩效应. 并且，在一定条件下，态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 可呈现出相似压缩现象；而在另外的条件下，上述的相似压缩便过渡成为压缩简并现象[29].

1 态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 与态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的基本结构

本文所构造的态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 是分别由态 $|\{Z_j\}\rangle_q$ 与态 $|\{0_j\}\rangle_q$、以及态 $|\{-Z_j\}\rangle_q$ 与态 $|\{0_j\}\rangle_q$ 等的线性叠加所组成的；由于态 $|\{Z_j\}\rangle_q$、态 $|\{0_j\}\rangle_q$ 和态 $|\{-Z_j\}\rangle_q$ 是三个截然不同的、且在宏观上完全可以分辨的量子光场态，因此由它们按照上述的线性叠加所组成的叠加态光场 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 和 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle$ 实质上是两种不同的两态叠加多模振幅 Schrödinger 猫态光场.

态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的数学表式为

$$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q = C_+^{(R)}|\{Z_j\}\rangle_q + C_+^{(0)}|\{0_j\}\rangle_q \tag{1}$$

$$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q = C_-^{(R)}|\{-Z_j\}\rangle_q + C_-^{(0)}|\{0_j\}\rangle_q \tag{2}$$

在以上两式中

$$\left.\begin{aligned} C_+^{(R)} &= r_+^{(R)}\exp[\mathrm{i}\,\theta_+^{(R)}] \\ C_+^{(0)} &= r_+^{(0)}\exp[\mathrm{i}\,\theta_+^{(0)}] \\ C_-^{(R)} &= r_-^{(R)}\exp[\mathrm{i}\,\theta_-^{(R)}] \\ C_-^{(0)} &= r_-^{(0)}\exp[\mathrm{i}\,\theta_-^{(0)}] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$Z_j = R_j\exp[\mathrm{i}\,\varphi_j] \quad (j = 1, 2, 3, \cdots, \cdots, q) \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} |Z_j\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|Z_j|^2\right]\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{Z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}|n_j\rangle \\ |-Z_j\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|Z_j|^2\right]\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n_j}\cdot Z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}|n_j\rangle \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} a_j|0_j\rangle &= 0 \\ a_j|Z_j\rangle &= Z_j|Z_j\rangle \\ a_j|-Z_j\rangle &= -Z_j|-Z_j\rangle \\ a_j^N|Z_j\rangle &= Z_j^N|Z_j\rangle \\ a_j^N|-Z_j\rangle &= (-1)^N\cdot Z_j^N|-Z_j\rangle \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\langle Z_j'|Z_j\rangle=\exp[-(|Z_j'|^2+|Z_j|^2)/2+Z_j'^{*}\cdot Z_j]\\
&\langle Z_j'|0_j\rangle=\exp[-|Z_j'|^2/2]\\
&\langle 0_j'|Z_j\rangle=\exp[-|Z_j|^2/2]\\
&\langle 0_{j'}|0_j\rangle=\delta_{j'j}=\begin{cases}1,(j'=j)\\0,(j'\neq j)\end{cases}\\
&\langle -Z_j'|-Z_j\rangle=\exp[-(|Z_j'|^2+|Z_j|^2)/2+Z_j'^{*}\cdot Z_j]\\
&\langle -Z_j'|0_j\rangle=\exp[-|Z_j'|^2/2]\\
&\langle 0_j'|-Z_j\rangle=\exp[-|Z_j|^2/2]
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
&|\{Z_j\}\rangle_q=|Z_1,Z_2,Z_3,\cdots,\cdots,Z_j,\cdots,\cdots,Z_{q-1},Z_q\rangle\\
&\qquad=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}|Z_j|^2\right]\right\}\cdot\sum_{\{n_j\}=0}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{q}\left[\frac{Z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right]\right\}|\{n_j\}\rangle_q\\
&|\{-Z_j\}\rangle_q=|-Z_1,-Z_2,-Z_3,\cdots,\cdots,-Z_j,\cdots,\cdots,-Z_{q-1},-Z_q\rangle\\
&\qquad=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}|Z_j|^2\right]\right\}\cdot\sum_{\{n_j\}=0}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{q}\left[\frac{(-1)^{n_j}\cdot Z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right]\right\}|\{n_j\}\rangle_q\\
&|\{0_j\}\rangle_q=|0_1,0_2,0_3,\cdots,\cdots,0_j,\cdots,\cdots,0_{q-1},0_q\rangle
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_j\,|\{0_j\}\rangle_q=0\\
&a_j\,|\{Z_j\}\rangle_q=Z_j\,|\{Z_j\}\rangle_q\\
&a_j\,|\{-Z_j\}\rangle_q=-Z_j\,|\{-Z_j\}\rangle_q\\
&a_j^N\,|\{Z_j\}\rangle_q=Z_j^N\,|\{Z_j\}\rangle_q\\
&a_j^N\,|\{-Z_j\}\rangle_q=(-1)^N\cdot Z_j^N\,|\{-Z_j\}\rangle_q
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\prod_{j=1}^{q}a_j^N\right]|\{Z_j\}\rangle_q=\left[\prod_{j=1}^{q}Z_j^N\right]|\{Z_j\}\rangle_q\\
&\left[\prod_{j=1}^{q}a_j^N\right]|\{-Z_j\}\rangle_q=(-1)^{qN}\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}Z_j^N\right]|\{-Z_j\}\rangle_q\\
&\left[\sum_{j=1}^{q}a_j^N\right]|\{Z_j\}\rangle_q=\left[\sum_{j=1}^{q}Z_j^N\right]|\{Z_j\}\rangle_q\\
&\left[\sum_{j=1}^{q}a_j^N\right]|\{-Z_j\}\rangle_q=(-1)^N\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}Z_j^N\right]|\{-Z_j\}\rangle_q
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&{}_q\langle\{Z_j'\}|\{Z_j\}\rangle_q=\exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}(|Z_j'|^2+|Z_j|^2)+Z_j'^{*}\cdot Z_j\right]\right\}\\
&{}_q\langle\{-Z_j'\}|\{-Z_j\}\rangle_q=\exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}(|Z_j'|^2+|Z_j|^2)+Z_j'^{*}\cdot Z_j\right]\right\}\\
&{}_q\langle\{Z_j'\}|\{0_j\}\rangle_q={}_q\langle\{-Z_j'\}|\{0_j\}\rangle_q=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}|Z_j'|^2\right]\right\}\\
&{}_q\langle\{0_j'\}|\{Z_j\}\rangle_q={}_q\langle\{0_j'\}|\{-Z_j\}\rangle_q=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}|Z_j|^2\right]\right\}\\
&{}_q\langle\{0_{j'}\}|\{0_j\}\rangle_q=\delta_{j'j}=\begin{cases}1,(j'=j)\\0,(j'\neq j)\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

式中, $|\{n_j\}\rangle_q=|n_1,n_2,n_3,\cdots,\cdots,n_j,\cdots,n_{q-1},n_q\rangle$ 为多模光子数态, 且 $\{n_j\}=n_1,n_2,n_3,\cdots,n_j,\cdots,n_q$; $|\{0_j\}\rangle_q=|0_1,0_2,0_3,\cdots,\cdots,0_j,\cdots,\cdots,0_{q-1},0_q\rangle$ 为多模真空态; a_j 为第 j 模光场的光子湮没算符 .

态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{+,4}^{(2)}\rangle_q$ 这两者的正交归一条件分别为

$${}_q\langle\Psi_{+,3}^{(2)}|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q=(r_+^{(R)2}+r_+^{(0)2})+2r_+^{(R)}r_+^{(0)}\cos[\theta^{(R)}-\theta^{(0)}]\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right]\right\}=1\tag{12a}$$

$$ {}_q\langle \Psi^{(2)}_{q,4} | \Psi^{(2)}_{q,4} \rangle_q = (r_-^{(R)2} + r_-^{(0)2}) + 2 r_-^{(R)} r_-^{(0)} \cos[\theta_-^{(R)} - \theta_-^{(0)}] \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \right] \right\} = 1 \tag{12b} $$

2 一般理论结果

2.1 等阶 N 次方 Y 压缩的一般理论结果

对于态 $|\Psi^{(2)}_{q,3}\rangle_q$ 和态 $|\Psi^{(2)}_{q,4}\rangle_q$ 而言，根据文献 1、2 关于等阶 N 次方 Y 压缩的定义，并利用本文的式(1)～(12)，经过大量的繁复计算，不难求得

$$ \begin{aligned} & 4\langle \Delta Y_1^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \\ = & \frac{2}{q}\Big\{ r_\pm^{(R)2}\Big\{ \sum_{j=1}^{q} R_j^{2N} + 2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}\Big\{ R_j^N R_{j'}^N \cos[N(\varphi_j - \varphi_{j'})] \Big\}\Big\} + r_\pm^{(R)2}\Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^{2N}\cos[2N\varphi_j] \Big\} \\ & + 2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}\Big\{ R_j^N R_{j'}^N \cos[N(\varphi_j + \varphi_{j'})] \Big\}\Big\} + r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\}\Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^{2N}\cos[2N\varphi_j + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)})] \Big\} \\ & + 2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}\Big\{ R_j^N R_{j'}^N \cos[N(\varphi_j + \varphi_{j'}) + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)})] \Big\}\Big\} - 2\Big\{ r_\pm^{(R)2}\Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^N \cos[N\varphi_j] \Big\}\Big\} \\ & + r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\} \cdot \Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^N \cos[N\varphi_j + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)})] \Big\}\Big\}\Big\}^2 \Big\} \end{aligned} \tag{13} $$

$$ \begin{aligned} & 4\langle \Delta Y_2^2(N)_q \rangle - \langle [A_q(N), A_q^+(N)] \rangle \\ = & \frac{2}{q}\Big\{ r_\pm^{(R)2}\Big\{ \sum_{j=1}^{q} R_j^{2N} + 2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}\Big\{ R_j^N R_{j'}^N \cos[N(\varphi_j - \varphi_{j'})] \Big\}\Big\} - r_\pm^{(R)2}\Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^{2N}\cos[2N\varphi_j] \Big\} \\ & + 2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}\Big\{ R_j^N R_{j'}^N \cos[N(\varphi_j + \varphi_{j'})] \Big\}\Big\} - r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\}\Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^{2N}\cos[2N\varphi_j + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)})] \Big\} \\ & + 2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}\Big\{ R_j^N R_{j'}^N \cos[N(\varphi_j + \varphi_{j'}) + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)})] \Big\}\Big\} - 2\Big\{ r_\pm^{(R)2}\Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^N \sin[N\varphi_j] \Big\}\Big\} \\ & + r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\} \cdot \Big\{ \sum_{j=1}^{q}\Big\{ R_j^N \sin[N\varphi_j + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)})] \Big\}\Big\}\Big\}^2 \Big\} \end{aligned} \tag{14} $$

在以上两式中，当取"＋"号时即表示态 $|\Psi^{(2)}_{q,3}\rangle_q$ 的一般理论结果，当取"－"号时即表示态 $|\Psi^{(2)}_{q,4}\rangle_q$ 的一般理论结果．可以看出：态 $|\Psi^{(2)}_{q,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{q,4}\rangle_q$ 这两者关于等阶 N 次方 Y 压缩理论的一般计算结果在形式上完全相同，其差别仅在于参数 $r_+^{(R)}$、$r_+^{(0)}$、$\theta_+^{(R)}$、$\theta_+^{(0)}$、$r_-^{(R)}$、$r_-^{(0)}$、$\theta_-^{(R)}$、$\theta_-^{(0)}$ 等的取值上．

2.2 等阶 N 次方 H 压缩的一般理论结果

对于态 $|\Psi^{(2)}_{q,3}\rangle_q$ 和态 $|\Psi^{(2)}_{q,4}\rangle_q$ 而言，根据文献 1、2 关于等阶 N 次方 H 压缩的定义，利用本文的式(1)～(12)，经过大量的繁复计算，同样可以求得

$$ \begin{aligned} & 4\langle \Delta H_1^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \\ = & 2\Big[\prod_{j=1}^{q} R_j^{2N} \Big] \cdot \Big\{ r_\pm^{(R)2}\Big\{ 1 + \cos\Big[2N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)\Big] \Big\} + r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\} \cdot \cos\Big[2N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big) + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)}) \Big] \\ & - 2\Big\{ r_\pm^{(R)2}\cos\Big[N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big) \Big] + r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\} \cdot \cos\Big[N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big) + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)}) \Big] \Big\}^2 \Big\} \end{aligned} \tag{15} $$

$$ \begin{aligned} & 4\langle \Delta H_2^2(N)_q \rangle - \langle [B_q(N), B_q^+(N)] \rangle \\ = & 2\Big[\prod_{j=1}^{q} R_j^{2N} \Big] \cdot \Big\{ r_\pm^{(R)2}\Big\{ 1 - \cos\Big[2N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)\Big] \Big\} - r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\} \cdot \cos\Big[2N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big) + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)}) \Big] \\ & - 2\Big\{ r_\pm^{(R)2}\sin\Big[N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big) \Big] + r_\pm^{(R)} r_\pm^{(0)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{q} R_j^2 \Big] \Big\} \cdot \sin\Big[N\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big) + (\theta_\pm^{(R)} - \theta_\pm^{(0)}) \Big] \Big\}^2 \Big\} \end{aligned} \tag{16} $$

在以上两式中，当取"＋"时即为态 $|\Psi^{(2)}_{q,3}\rangle_q$ 的一般理论结果，当取"－"时即为态 $|\Psi^{(2)}_{q,4}\rangle_q$ 的一般理论结果．同样可以看出：态 $|\Psi^{(2)}_{q,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{q,4}\rangle_q$ 这两者关于等阶 N 次方 H 压缩理论的一般计算结果在形式上也完全相同，两者之间的差别也只表现在两态叠加的复几率幅 $C_+^{(R)}$、$C_+^{(0)}$、$C_-^{(R)}$ 和 $C_-^{(0)}$ 上．

3　态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的等阶 N 次方 Y 压缩效应

3.1　第一正交分量的压缩情况

在本文的讨论中,假定 $r_+^{(R)}$、$r_+^{(0)}$、$r_-^{(R)}$、$r_-^{(0)}$、$R_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots q)$ 等均为有限的正实数 . 因此,对于第一正交分量而言,若各模的初始相位 $\varphi_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$ 满足条件

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_j=\pm(2k_\varphi+1)\cdot\pi/(2N)\\&(k_\varphi=0,1,2,3,\cdots,\cdots)\\&(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

1) 当 $(\theta_\pm^{(R)}-\theta_\pm^{(0)})=\pm 2k_\theta\pi(k_\theta=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$ 时,式(13)及式(14)可化为

$$4\langle\Delta Y_1^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^+(N)]\rangle=-\frac{2}{q}r_\pm^{(R)}r_\pm^{(0)}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right]\right\}\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0\tag{18}$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^+(N)]\rangle>0\tag{19}$$

这表明,在这种情况下,态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的第一正交分量存在着周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应,而第二正交分量则不存在等阶 N 次方 Y 压缩效应 . 可以看出:式(18)所表征第一正交分量的等阶 N 次方 Y 压缩效应的压缩深度,与两态叠加几率幅的乘积 $r_\pm^{(R)}$、$r_\pm^{(0)}$ 成正比,与腔模总数 q、压缩阶数 N 以及压缩参数 $R_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$ 等呈较强的非线性关联 . 各不同阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应既互相独立,又可以同时存在 . 此外,由式(18)还可以看出,态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 与态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 这两者的第一正交分量所呈现出的等阶 N 次方 Y 压缩效应的规律(即两者的等阶 N 次方 Y 压缩在形式上)是完全相同的;它们的差别仅表现在乘积因子 $r_+^{(R)}\cdot r_+^{(0)}$ 与 $r_-^{(R)}\cdot r_-^{(0)}$ 这两者是否相等上 .

2) 当 $(\theta_\pm^{(R)}-\theta_\pm^{(0)})=\pm(2k_\theta+1)\cdot\pi/2(k_\theta=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$ 时,式(13)及式(14)可进一步化为

$$4\langle\Delta Y_1^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^+(N)]\rangle=-\frac{4}{q}\left[r_\pm^{(R)}r_\pm^{(0)}\right]^2\cdot\exp\left\{-\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right\}\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0\tag{20}$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^+(N)]\rangle>0\tag{21}$$

这又表明,在这种情况下,态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 这两者的第一正交分量确实存在着周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应;其第二正交分量则不呈现等阶 N 次方 Y 压缩效应 . 与式(18)的情况不同,式(20)所表征的等阶 N 次方 Y 压缩效应的压缩深度,与两态叠加几率幅乘积的平方 $[r_\pm^{(R)}\cdot r_\pm^{(0)}]^2$ 成正比,与腔模总数 q、压缩阶数 N 以及压缩参数 $R_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$ 等呈更强的非线性关联 . 可以看出,在这种情况下,态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 与态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的第一正交分量的等阶 N 次方 Y 压缩的规律也完全相同;与式(18)的不同之处在于,此时两者的差别表现在乘积因子的平方 $[r_+^{(R)}\cdot r_+^{(0)}]^2$ 与 $[r_-^{(R)}\cdot r_-^{(0)}]^2$ 是否相等这一问题上 .

3) 当态间的初始相位差 $(\theta_\pm^{(R)}-\theta_\pm^{(0)})$ 在以下的两个态间压缩区

$$\left.\begin{aligned}&(\theta_\pm^{(R)}-\theta_\pm^{(0)})\in[+2k_\theta\pi-\pi/2,+2k_\theta\pi+\pi/2]\\&(\theta_\pm^{(R)}-\theta_\pm^{(0)})\in[-2k_\theta\pi-\pi/2,-2k_\theta\pi+\pi/2]\\&(k_\theta=0,1,2,3,\cdots,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

内取值时,式(13)及式(14)可化为

$$4\langle\Delta Y_1^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^+(N)]\rangle<0\tag{23}$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^+(N)]\rangle>0\tag{24}$$

可见,只要各模的初始相位 $\varphi_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$ 满足式(17),态间的初始相位差 $(\theta_\pm^{(R)}-\theta_\pm^{(0)})$ 满足式(22),那么态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的第一正交分量就总是呈现出周期性变化的、任意阶的广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩效应,其第二正交分量在这种情况下始终不呈现等阶 N 次方 Y 压缩效应 .

3.2　第二正交分量的压缩情况

如果各模的初始相位 $\varphi_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$ 满足条件

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_j=\pm k_\varphi\cdot\pi/N\\&(k_\varphi=0,1,2,3,\cdots,\cdots)\\&(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

1) 当$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})=\pm 2k_{\theta}\pi(k_{\theta}=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$时,式(13)及式(14)可化为

$$4\langle \Delta Y_1^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^{+}(N)]\rangle>0 \tag{26}$$

$$4\langle \Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^{+}(N)]\rangle=-\frac{2}{q}r_{\pm}^{(R)}r_{\pm}^{(0)}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right]\right\}\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0 \tag{27}$$

可见,在这种情况下,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第二正交分量可呈现出周期性变化的、任意阶的等阶$N$次方Y压缩效应,而第一正交分量则不呈现等阶$N$次方Y压缩效应.将式(27)与式(18)相比可知,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第一和第二两个正交分量的等阶$N$次方Y压缩效应的压缩结果(即压缩程度和压缩深度)完全相同;再将式(25)与式(17)相比可知,两者的压缩条件即各模初始相位$\varphi(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$的取值正好相反.这表明:态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第一和第二两个正交分量的等阶$N$次方Y压缩效应随着各模初始相位$\varphi$的变化,呈周期性的互补关系.

2) 当$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})=\pm(2k_{\theta}+1)\cdot\pi/2(k_{\theta}=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$时,式(13)及式(14)可化为

$$4\langle \Delta Y_1^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^{+}(N)]\rangle>0 \tag{28}$$

$$4\langle \Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^{+}(N)]\rangle=-\frac{4}{q}\left[r_{\pm}^{(R)}r_{\pm}^{(0)}\right]^2\cdot\exp\left\{-\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right\}\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0 \tag{29}$$

可见,在这种情况下,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第二正交分量亦可呈现出周期性变化的、任意阶的等阶N次方Y压缩效应,第一正交分量则不出现压缩.同样地,在这种情况下上述两态的第一及第二两个正交分量其压缩结果相同、压缩条件(φ的取值)相反,并且呈周期性的互补关系.

3) 当态间的初始相位差$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$在式(22)所表征的两个态间压缩区内取值时,式(13)及式(14)可化为

$$4\langle \Delta Y_1^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^{+}(N)]\rangle>0 \tag{30}$$

$$4\langle \Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^{+}(N)]\rangle<0 \tag{31}$$

可见,在这种情况下,只要各模的初始相位$\varphi(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$的取值满足式(25),态间的初始相位差$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$在式(22)所表征的两个态间压缩区内取值,那么态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第二正交分量就总是呈现出周期性的、任意阶的等阶$N$次方Y压缩效应,第一正交分量始终不会出现压缩.一般而言,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第一和第二两个正交分量,它们呈现等阶$N$次方Y压缩效应时的压缩结果完全相同,态间压缩条件[即态间的初始相位差满足式(22)]亦完全相同,但各模间的压缩条件[即各模的初始相位分别满足式(17)及式(25)]正好相反;第一及第二两个正交分量的等阶N次方Y压缩效应将随各模的初始相位$\varphi(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$的变化而呈周期性的互补关系.

3.3 关于等阶 N 次方 Y 相似压缩与等阶 N 次方 Y 压缩简并的界定

综上所述可知,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$这两者的等阶$N$次方$Y$压缩具有相似性质和简并性质.当组成态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的两态叠加的各对应复几率幅不相等,亦即当$C_{+}^{(R)}\neq C_{-}^{(R)}$和$C_{+}^{(0)}\neq C_{-}^{(0)}$时,尽管态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$与态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$这两者呈现等阶$N$次方Y压缩效应时的压缩条件和压缩特征(即压缩规律)完全相同,但其压缩幅度(即压缩程度和压缩深度)却不相等,这种现象称为等阶N次方Y相似压缩.当组成态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的两态叠加的各对应复几率幅相等,亦即当$C_{+}^{(R)}=C_{-}^{(R)}$和$C_{+}^{(0)}=C_{-}^{(0)}$时,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$这两种截然不同的量子光场态所呈现出的等阶$N$次方Y压缩效应不仅具有完全相同的压缩条件和压缩特征(即压缩规律),而且还具有完全相等的压缩幅度(即压缩程度和压缩深度);这就是说,上述两种截然不同的量子光场态的压缩情况完全等价.这种现象,就称为等阶N次方Y压缩简并.

4 态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的等阶 N 次方 H 压缩效应

4.1 第一正交分量的压缩情况

对于态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$而言,若各模的初始相位和$\sum_{j=1}^{q}\varphi$满足条件

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{q}\varphi=\pm(2k_{\varphi}+1)\cdot\pi/(2N)\\&(k_{\varphi}=0,1,2,3,\cdots,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

1) 当 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})=\pm 2k_\theta\pi(k_\theta=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$ 时，式(15)及式(16)可进一步化为

$$4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle=-2r_{\pm}^{(R)}r_{\pm}^{(0)}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right]\right\}\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0 \tag{33}$$

$$4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle>0 \tag{34}$$

这就表明，在这种情况下，态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的第一正交分量存在着周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 H 压缩效应，第二正交分量不呈现等阶 N 次方 H 压缩效应．式(33)与乘积因子 $r_{\pm}^{(R)}\cdot r_{\pm}^{(0)}$ 成正比，与腔模总数 q、压缩阶数 N、以及压缩参数 $R_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$ 等呈较强的非线性关联；与前述的等阶 N 次方 Y 压缩的情形[即与本文的式(18)和式(27)]相比，上述的非线性关联程度更强．可以看出，各不同阶的等阶 N 次方 H 压缩效应既互相独立，又可以同时存在．由式(33)还可以看出：态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 与态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 这两者第一正交分量的等阶 N 次方 H 压缩效应的规律是完全相同的，其差别也只体现在乘积因子 $r_{+}^{(R)}\cdot r_{+}^{(0)}$ 与 $r_{-}^{(R)}\cdot r_{-}^{(0)}$ 是否相等这一问题上．

2) 当 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})=\pm(2k_\theta+1)\cdot\pi/2(k_\theta=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$ 时，式(15)及式(16)可化为

$$4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle=-4[r_{\pm}^{(R)}\cdot r_{\pm}^{(0)}]^2\cdot\exp\left\{-\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right\}\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0 \tag{35}$$

$$4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle>0 \tag{36}$$

这再次表明，在这种情况下，态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 这两者的第一正交分量都存在着周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 H 压缩效应，第二正交分量不呈现等阶 N 次方 H 压缩效应．与式(33)不同，式(35)与两态叠加几率幅乘积因子的平方 $[r_{\pm}^{(R)}\cdot r_{\pm}^{(0)}]^2$ 成正比，与腔模总数 q、压缩阶数 N 以及压缩参数 $R_j(j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$ 等呈更强的非线性关联．此外，将式(35)与本文的式(20)及式(29)相比，可以看出，等阶 N 次方 H 压缩效应与上述诸参量的非线性关联程度要比等阶 N 次方 Y 压缩效应的更强；这就表明，等阶 N 次方 H 压缩效应的压缩阶数要比等阶 N 次方 Y 压缩效应的压缩阶数高的多．另外，从式(35)还可以看出，态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 与态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的第一正交分量的等阶 N 次方 H 压缩的规律也完全相同；与式(33)不同，在这种情况下上述两态的差别仅表现在乘积因子的平方 $[r_{+}^{(R)}\cdot r_{+}^{(0)}]^2$ 与 $[r_{-}^{(R)}\cdot r_{-}^{(0)}]^2$ 是否相等这一问题上．

3) 当态间的初始相位差 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 在式(22)所表征的态间压缩区内连续取值时，式(15)及式(16)可化为

$$4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle<0 \tag{37}$$

$$4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle<0 \tag{38}$$

可见，在这种情况下，只要各模的初始相位和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 满足式(32)，态间的初始相位差 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 满足式(22)，那么态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的第一正交分量总可呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 H 压缩效应，而第二正交分量始终不呈现等阶 N 次方 H 压缩效应．

4.2　第二正交分量的压缩情况

如果各模的初始相位和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 满足条件

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{q}\varphi_j=\pm k_\varphi\cdot\pi/N\\&(k_\varphi=0,1,2,3,\cdots,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

1) 当 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})=\pm 2k_\theta\pi(k_\theta=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$ 时，式(15)及式(16)可化为

$$4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle>0 \tag{40}$$

$$4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle=-2r_{\pm}^{(R)}r_{\pm}^{(0)}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right]\right\}\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0 \tag{41}$$

可见，在这种情况下，态 $|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$ 的第二正交分量亦呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 H 压缩效应，第一正交分量则不呈现等阶 N 次方 H 压缩效应．将式(41)与式(33)相比可知，第一及第二两个正交分量它们在呈现等阶 N 次方 H 压缩效应时的压缩结果(即压缩程度和压缩深度)完全相同，态间

压缩条件[即态间初始相位差$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$的取值]也完全相同,但各模的初始相位和$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$的取值情况正好相反;第一及第二两个正交分量的等阶$N$次方H压缩效应将随各模初始相位和$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$的变化,呈现周期性的互补关系.

2) 当$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})=\pm(2k_\theta+1)\cdot\pi/2\ (k_\theta=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$时,式(15)及式(16)可化为

$$4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle>0 \tag{42}$$

$$4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle=-4[r_{\pm}^{(R)}\cdot r_{\pm}^{(0)}]^2\cdot\exp\left\{-\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right\}\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^N\right]^2<0 \tag{43}$$

可见,在这种情况下,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第二正交分量亦可呈现出周期性变化的、任意阶的等阶N次方H压缩效应,第一正交分量则不呈现等阶N次方H压缩效应.可以看出,此时第一及第二两个正交分量的压缩结果相同,态间压缩条件也相同,但模间压缩条件[即$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$的取值情况]正好相反;两者关于$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$也呈周期性的互补关系.

3) 当态间的初始相位差$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$在式(22)所表征的两个态间压缩区内取值时,式(15)及式(16)可化为

$$4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle>0 \tag{44}$$

$$4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle<0 \tag{45}$$

可见,只要各模的初始相位和$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$满足式(39),态间的初始相位差满足式(22),那么态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的第二正交分量总是呈现出周期性变化的、任意阶的等阶N次方H压缩效应,但其第一正交分量始终不出现等阶N次方H压缩效应.综上分析可知,上述两态的第一及第二两个正交分量,它们分别呈现等阶N次方H压缩效应时的压缩结果相同,态间压缩条件也相同[即满足式(22)],但模间压缩条件正好相反[即分别满足式(32)及式(39)];随着模间压缩条件的变化[即随着$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$取值的不同],第一及第二两个正交分量的等阶N次方H压缩效应将呈现出周期性的互补关系.

4.3 关于等阶N次方H相似压缩与等阶N次方H压缩简并的界定

综上所述,可知态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$这两者的等阶$N$次方H压缩也具有相似性质和简并性质.当且仅当组成态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的两态叠加的各对应复几率幅不相等,亦即当$C_+^{(R)}\neq C_-^{(R)}$和$C_+^{(0)}\neq C_-^{(0)}$时,尽管态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$与态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$这两者所呈现的等阶$N$次方H压缩效应的压缩条件和压缩特征(即压缩规律)完全相同,但两者的压缩幅度(即压缩程度和压缩深度)却不相等,这种现象就称为上述两种截然不同的量子光场态的等阶N次方H相似压缩.用数学语言表述就是,态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$的等阶$N$次方H压缩效应的关系曲线与态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的等阶$N$次方H压缩效应的关系曲线这两者随腔模总数$q$、压缩阶数$N$、压缩参数$R_j\ (j=1,2,3,\cdots,\cdots,q)$、各模的初始相位和$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$以及态间的初始相位差$(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$等的变化规律相同,但随$(r_{\pm}^{(R)}\cdot r_{\pm}^{(0)})$的变化幅度不同.也就是说,上述两条曲线的横向比例相等但纵向比例不等.因此,若将上述两条关系曲线中的一条曲线的所有纵坐标按照一定的比例扩大或者缩小相同的倍数,则可得到另一条关系曲线.这就是等阶N次方H相似压缩的数学描述,这一描述对于前述的等阶N次方Y相似压缩的情形也是成立的.

当且仅当组成态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$的两态叠加的各对应复几率幅相等,亦即当$C_+^{(R)}=C_-^{(R)}$和$C_+^{(0)}=C_-^{(0)}$时,由态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$及态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$这两种截然不同的量子光场态所呈现出的等阶$N$次方H压缩效应不仅具有完全相同的压缩条件和压缩特征,而且还具有完全相等的压缩幅度.也就是说,上述两种截然不同的量子光场态的等阶N次方H压缩完全等价.这种现象,称为等阶N次方H压缩简并.用数学语言描述:就是态$|\Psi_{+,3}^{(2)}\rangle_q$与态$|\Psi_{-,4}^{(2)}\rangle_q$这两者的等阶$N$次方H压缩效应的关系曲线重合.与之相同,前述的等阶N次方Y压缩简并也具有这一性质.

5　结论

综上所述，可得以下五点结论：

1) 当各模的初始相位 φ_j 满足式(17)，态间的初始相位差 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 分别等于 $\pm 2k_{\theta}\pi$、$\pm(2k_{\theta}+1)\pi/2$ 以及满足式(22)时，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的第一正交分量就会呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应，第二正交分量则不呈现等阶 N 次方 Y 压缩效应．当各模的初始相位 φ_j 满足式(25)，态间的初始相位差 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 分别等于 $\pm 2k_{\theta}\pi$、$\pm(2k_{\theta}+1)\pi/2$ 以及满足式(22)时，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的第二正交分量就会呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应，而第一正交分量则不呈现等阶 N 次方 Y 压缩效应．态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的第一和第二两个正交分量的等阶 N 次方 Y 压缩效应的压缩结果(即两者的压缩程度和压缩深度)完全相同，态间压缩条件也完全相同，但模间压缩条件正好相反；随着模间压缩条件的变化，第一及第二两个正交分量的等阶 N 次方 Y 压缩效应将呈现出周期性的互补关系．一般而言，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 所呈现出的等阶 N 次方 Y 压缩分别与两态叠加的几率幅 $r_{\pm}^{(R)}$、$r_{\pm}^{(0)}$，腔模总数 q、压缩阶数 N、压缩参数 R_j、各模的初始相位 φ_j 以及态间的初始相位差 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 等呈较强的非线性关联．各不同阶的等阶 N 次方 Y 压缩效应既互相独立，又可以同时存在．

2) 态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 与态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 这两者的等阶 N 次方 Y 压缩效应具有相似性质和简并性质．当组成态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的两态叠加的各对应复几率幅不相等，亦即当 $C_{+}^{(R)}\neq C_{-}^{(R)}$ 和 $C_{+}^{(0)}\neq C_{-}^{(0)}$ 时，上述两态便会呈现出等阶 N 次方 Y 相似压缩．当 $C_{+}^{(R)}=C_{-}^{(R)}$ 和 $C_{+}^{(0)}=C_{-}^{(0)}$ 时，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 便会呈现出等阶 N 次方 Y 压缩简并现象．

3) 当各模的初始相位和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 满足式(32)，态间的初始相位差 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 分别等于 $\pm 2k_{\theta}\pi$、$\pm(2k_{\theta}+1)\pi/2$ 以及满足式(22)时，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的第一正交分量总可呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 H 压缩效应，第二正交分量则不呈现等阶 N 次方 H 压缩效应．当各模的初始相位和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 满足式(39)，态间的初始相位差 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 分别等于 $\pm 2k_{\theta}\pi$、$\pm(2k_{\theta}+1)\pi/2$ 以及满足式(22)时，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的第二正交分量就会呈现出周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 H 压缩效应，第一正交分量则不呈现等阶 N 次方 H 压缩效应．与等阶 N 次方 Y 压缩的情形相类似，随着 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 的变化，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 的第一和第二两个正交分量的等阶 N 次方 H 压缩效应也呈现周期性的互补关系．与等阶 N 次方 Y 压缩的情形不同，等阶 N 次方 H 压缩分别与 $r_{\pm}^{(R)}$、$r_{\pm}^{(0)}$、q、N、R_j、$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 和 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 等参量的非线性关联程度更高，这表明等阶 N 次方 H 压缩的压缩阶数要比等阶 N 次方 Y 压缩的压缩阶数高的多．可以看出，各不同阶的等阶 N 次方 H 压缩效应既互相独立又可同时存在．

4) 态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 与态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 这两者的等阶 N 次方 H 压缩效应也具有相似性质和简并性质．当 $C_{+}^{(R)}\neq C_{-}^{(R)}$ 和 $C_{+}^{(0)}\neq C_{-}^{(0)}$ 时，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 和态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 就会呈现出等阶 N 次方 H 相似压缩；而当 $C_{+}^{(R)}=C_{-}^{(R)}$ 和 $C_{+}^{(0)}=C_{-}^{(0)}$ 时，态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 和态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 就会呈现出等阶 N 次方 H 压缩简并现象．

5) $C_{+}^{(R)}$、$C_{-}^{(R)}$ 是否相等以及 $C_{+}^{(0)}$、$C_{-}^{(0)}$ 是否相等，是用来判定态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 与态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 这两者之间究竟存在相似压缩还是存在压缩简并现象的理论判据；而 φ_j、$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 以及 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 等的取值情况，则是用来判定态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 这两者是否呈现等阶 N 次方 Y 压缩和等阶 N 次方 H 压缩效应的核心和关键．由上分析可知，φ_j、$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 和 $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ 这三者的取值情况正好反映了模间和态间的量子干涉行为．因此，态间的量子干涉效应和模间的量子干涉效应的存在，是导致态 $|\Psi^{(2)}_{+,3}\rangle_q$ 和态 $|\Psi^{(2)}_{-,4}\rangle_q$ 分别呈现周期性变化的、任意阶的等阶 N 次方 Y 压缩和等阶 N 次方 H 压缩效应的根本原因．

参考文献

1 杨志勇,侯洵 .一种双模叠加态光场的两种非线性高阶压缩效应 .光子学报,1998,27(4):289~299
2 侯洵,杨志勇 .第Ⅰ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究 .光子学报,1998,27(10):865~878
3 杨志勇,侯洵 .多模辐射场的广义非线性高阶差压缩 .N 次方 X 压缩的一般理论 .光子学报,1998,27(12):1065~1069
4 杨志勇,侯洵 .多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论 .光子学报,1999,28(5):385~392
5 杨志勇 .多模辐射场的量子统计性质以及时域量子化问题研究[博士论文] .中国科学院西安光学精密机械研究所,1999:1~6;18~88;89~118
6 杨志勇,侯洵 .量子光学领域中的若干重大进展 .见:新世纪科学论坛 .西安:陕西科学技术出版社,1999:125~139
7 杨志勇,侯洵 .量子体系中的时域压缩-频域展宽正、逆效应及其非经典性 .光子学报,1998,27(9):769~777
8 杨志勇,侯洵 .再论时域的量子化及其物理本质 .光子学报,1998,27(12):1057~1064
9 Stoler D. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. Phys Rev(D),1970,D1(12):3217~3219
10 Hillery M. Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field. Phys Rev(A),1987,A36(8):3796~3802
11 Bergou J A,Hillery M,Yu Daoqi. Minimum Uncertainty states for amplitude-squared squeezing:Hermite polynomial states. Phys Rev(A),1991,A43(1):515~520
12 Zhang Z M,Xu Lei,Chai Jinlin,Li Fuli. A new kind of higher-order squeezing of radiation field. Phys Lett(A),1990,A150(1):27~30
13 Hillery M,Sum and difference squeezing of the electromagnetic field. Phys Rev(A),1989,A40(6):3147~3155
14 [日]广田修著,程希望,苗正培译 .光通信理论-量子论基础 .西安:西安电子科技大学出版社,1991:1~228
15 张纪岳,杨志勇 .两等价二能级原子与三模腔场共振相互作用的辐射谱 .量子光学学报,1995,1(1):75~84
16 杨志勇 .两等同双能级原子与三模腔场六光子共振相互作用辐射谱研究 .光学学报,1997,17(5):513~519
17 杨志勇,张卓德,魏忠才,王菊霞 .两等同双能级原子与三模腔场任意多光子共振相互作用辐射谱的一般特征 .渭南师专学报(自然科学版),1996,11(1):12~21
18 杨志勇,张纪岳 .两等同双能级原子与 q 模腔场任意 N●光子共振相互作用辐射谱研究 .光子学报,1997,26(6):481~492
19 郭光灿 .量子信息研究论文选集 .中国科学技术大学,1998,1~27;43~126;147~251
20 国家自然科学基金委员会、科技日报科教部(合办) .21 世纪核心科学问题展望 .科技日报,1999
21 杨志勇,侯洵 .第Ⅱ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究 .光子学报,1998,27(11):961~974
22 赵玲慧,杨志勇,侯洵,张振杰 .一种新型的两态叠加多模叠加 DYN 光场的广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩 .光子学报,2000,29(3):193~202
23 赵玲慧,杨志勇,侯瑶,张振杰,侯洵 .一种新型的两态叠加多模叠加态光场的广义非线性等阶 N 次方 H 压缩 .光子学报,2000,29(4):293~307
24 张党卫,杨志勇,侯洵,张振杰,侯瑶 .受量子相位调制的两态叠加多模叠加态光场的广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩 .光子学报,已录用,即将发表
25 刘伟民,侯瑶,杨志勇,孙秀泉,侯洵 .一种新型的两态叠加多模 Schrödinger 猫态光场的等阶 N 次方 Y 压缩 .光子学报,1999,28(10):869~883
26 刘伟民,杨志勇,侯瑶,孙秀泉,张振杰,侯洵 .一种新型的两态叠加 MSCS 光场的广义非线性等阶 N 次方 H 压缩 .光子学报,已录用,即将发表
27 许定国,侯瑶,杨志勇,侯洵 .多模偶相干态光场中的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩特性研究 .光子学报,1999,28(6):481~493
28 许定国,侯瑶,杨志勇,侯洵 .多模奇相干态光场中的 N-Y 最小测不准态与 N-H 最小测不准态 .光子学报,1999,28(7):577~587
29 许定国,侯瑶,王菊霞,杨志勇,侯洵 .多模复共轭奇、偶相干态光场的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩 .光子学报,1999,28(8):673~683

STUDY ON THE PROPERTIES OF BOTH GENERALIZED NONLINEAR EQUAL-ORDER *N*-TH POWER Y-SQUEEZING AND GENERALIZED NONLINEAR EQUAL-ORDER *N*-TH POWER H-SQUEEZING IN THE THIRD AND THE FOURTH KINDS OF MULTIMODE SUPERPOSITION STATE LIGHT FIELD WITH THE SUPERPOSITIONS OF MACROSCOPICALLY DISTINCT TWO QUANTUM STATES*

——on the Phenomena of Similitude Squeezing and Degenerate Squeezing

Hou Xun[1,2], Yang Zhiyong[1,3], Xu Dingguo[1,4], Hou Yao[5], Sun Xiuquan[5], Zhang Zhenjie[1]

(1 *Institute of Photonics & Photon-Technology, and Provincial Key Laboratory of Photoelectronic Technology, Northwest University, Xi′an* 710069)

(2 *Xi′an Institute of Optics & Precision Mechanics, and State Key Laboratory of Transient Optical Technology, the Academy of Sciences of China, Xi′an* 710068)

(3 *Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi′an* 710069)

(4 *Institute of Quantum Optics & Quantum Information Science, and Department of Physics, Shangluo Normal College, Shangzhou* 726000)

(5 *Department of Physics, Northwest University, Xi′an* 710069)

Received date: 1999－10－12

Abstract According to the linear superposition principle of quantum mechanics in this paper, it is constructed respectively the third kind of multimode superposition state light field $|\Psi^{(2)}_{3}\rangle_q$ composed of the linear superposition of multimode (or q-mode) coherent state $|\{Z_j\}\rangle_q$ and multimode vaccum state $|\{0_j\}\rangle_q$, and the fourth kind of multimode superposition state light field $|\Psi^{(2)}_{4}\rangle_q$ made of the linear superposition of the contrary state $|\{-Z_j\}\rangle_q$ of the multimode coherent state $|\{Z_j\}\rangle_q$ and the multimode vaccum state $|\{0_j\}\rangle_q$ mentioned above. By utilizing the theory of multimode squeezed states established recently by Yang Zhiyong and Hou Xun and published in Acta Photonica Sinica, the properties of both generalized nonlinear equal-order N-th power Y-squeezing and generalized nonlinear equal-order N-th power H-squeezing of the state $|\Psi^{(2)}_{3}\rangle_q$ and the state $|\Psi^{(2)}_{4}\rangle_q$ mentioned are studied firstly in detail. It is found that 1) if some certain quantization conditions are satisfied respectively by the initial phase φ_j (here $j=1,2,3,\cdots,\cdots,q$) of each mode, or by the initial phase sum $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$, and by the initial phase difference $(\theta_{\pm}^{(R)}-\theta_{\pm}^{(0)})$ between the two components $|\{\pm Z_j\}\rangle_q$ and $|\{0_j\}\rangle_q$, the state $|\Psi^{(2)}_{3}\rangle_q$ and the state $|\Psi^{(2)}_{4}\rangle_q$ can always display any order generalized nonlinear equal-order N-th power Y-squeezing and N-th power H-squeezing that changes periodically, these show that the state $|\Psi^{(2)}_{3}\rangle_q$ and the state $|\Psi^{(2)}_{4}\rangle_q$ are two kinds of typical nonclasical multimode light fields; 2) if the corresponding complex probability amplitudes between the state $|\Psi^{(2)}_{3}\rangle_q$ and the state $|\Psi^{(2)}_{4}\rangle_q$ are not equal to each other, the state $|\Psi^{(2)}_{3}\rangle_q$ and the state $|\Psi^{(2)}_{4}\rangle_q$ can always present the 'similitude squeezing' of both equal-order N-th power Y-squeezing and equal-order N-th power H-squeezing; and 3) if the corresponding complex probability amplitudes mentioned above are equal to each other, the state $|\Psi^{(2)}_{3}\rangle_q$ and the state $|\Psi^{(2)}_{4}\rangle_q$ can always present the 'degenerate squeezing' of both equal-order N-th power Y-squeezing and equal-order N-th power H-squeezing.

Keywords Superpositions of macroscopically distinct two quantum states; Multimode superposition state light field; Equal-order N-th power Y-squeezing; Equal-order N-th power H-squeezing; Similitude squeezing; Degenerate squeezing

Hou Xun was born in 1936, graduated from Physics Department of Northwest University of China in 1959 and joined Xi′an Institute of Atomic Energy, Chinese Academy of Sciences. Since 1962 he has been working on High Speed Photography and Photonics at Xi′an Institute of Optics and Precision Mechanics, CAS, as a research assistant, associate professor and professor. He studied at Imperial College of London University from 1979 to 1981. His major research areas are image converter high speed photography, image intensifier, generation and measurement of ultrashort laser pulese. He is an academician of Chinese Academy of Sciences.

* Supported by the funds of both the natural science of Shaanxi Province and the specialized scientific research of Educational Committee of Shaanxi Province, P. R. China. and supported by the funds of natural science of Northwest University, Xi′an, P. R. China.