第 28 卷第 5 期
1999 年 5 月

光子学报
ACTA PHOTONICA SINICA

Vol.28 No.5
May 1999

多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论*

杨志勇[1]　侯　洵[1,2,3]

(1 西北大学光子学与光子技术研究所,西北大学光电子技术省级重点开放实验室,西安 710069)

(2 中国科学院西安光学精密机械研究所,西安 710068)

(3 瞬态光学技术国家重点实验室,西安 710068)

摘　要　本文建立了多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论. 首次提出了多模辐射场中各模压缩阶数不相等的 N_j 次方 Y 压缩、N_j 次方 H 压缩以及 N_j 次方 X 压缩的一般性定义,并对 N_j-Y 最小测不准态、N_j-Y 压缩最小测不准态、N_j-H 最小测不准态、N_j-H 压缩最小测不准态以及 N_j-X 最小测不准态和 N_j-X 压缩最小测不准态等进行了详细讨论. 指出,Zhang 等人在国际上提出的有关单模辐射场的振幅 N 次方压缩的定义、Mark Hillery 在国际上提出的有关双模辐射场的"双模和压缩"与"双模差压缩"的定义以及由笔者新近提出的有关多模辐射场的 N 次方 Y 压缩、N 次方 H 压缩和 N 次方 X 压缩等的定义,仅仅只是本文所提出的 N_j 次方 Y 压缩、N_j 次方 H 压缩以及 N_j 次方 X 压缩等的一般性定义在各种不同条件下的特例.

关键词　多模辐射场;广义非线性不等阶高阶压缩;N_j 次方 Y 压缩;N_j 次方 H 压缩;N_j 次方 X 压缩;压缩度;不等阶最小测不准态;不等阶压缩最小测不准态

0　引言

随着压缩态理论的发展,随着理论研究工作的深入,随着人们对于光场的压缩及非线性高阶压缩效应的认识的不断深化,有关多模辐射场的广义非线性高阶压缩问题的研究工作,已经日益成为当前量子光学领域内的前沿性的热门研究课题[1~5,8].

文献 1 在发展单模及双模辐射场的压缩理论[6,7]的基础上,提出了双模及多模辐射场的两种非线性高阶压缩(即 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩)的定义,并对四态叠加双模叠加态光场的 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩效应进行了详细研究. 文献 2 则在上述研究的基础上,进一步提出了 N-Y 最小测不准态、N-Y 压缩最小测不准态、N-H 最小测不准态、N-H 压缩最小测不准态等的定义,并对第Ⅰ类两态叠加多模叠加态光场的 N 次方 Y 压缩及 N 次方 H 压缩效应等进行了详细研究. 文献 3 则利用上述理论,进一步研究了第Ⅱ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩效应. 文献 4 则在发展 Mark Hillery 提出的有关双模辐射场的"双模差压缩"的定义[7]的基础上,进一步提出了多模辐射场的广义非线性高阶差压缩(即 N 次方 X 压缩)的一般理论,指出 N 次方 X 压缩效应是独立于 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩效应的、多模辐射场的另一种广义的非线性高阶压缩效应. 文献 5 对量子体系的时域压缩-频域展宽和频域压缩-时域展宽效应进行了详细研究,从理论上证明了超短激光脉冲序列实质上是迄今为止人们在实验上所获得的一系列时

* 陕西省自然科学基金和陕西省教委专项科研基金资助项目
收稿日期:1999－02－05

域上的压缩态，超短激光脉冲的脉宽压缩问题实质上是一种时域上的压缩效应，而超短脉冲激光实质上是一种典型的时域压缩态光.

但上述所有这些研究，只是讨论了多模辐射场中各模压缩阶数相等的这一特殊情形，而对于多模辐射场中各模的压缩阶数不相等的普遍情形则未作任何探讨.

本文在发展现有的多模辐射场的压缩及非线性高阶压缩理论[1~5]的基础上，进一步建立了多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论.首次提出了多模辐射场中各模压缩阶数不相等的 N_j 次方 Y 压缩，N_j 次方 H 压缩以及 N_j 次方 X 压缩的一般性定义，并对 N_j-Y 最小测不准态、N_j-Y 压缩最小测不准态、N_j-H 最小测不准态、N_j-H 压缩最小测不准态、N_j-X 最小测不准态和 N_j-X 压缩最小测不准态等进行了详细讨论.指出，现有的单模辐射场、双模辐射场以及多模辐射场的压缩及非线性高阶压缩理论[1~7]，仅仅只是本文所建立的多模辐射的广义非线性不等阶高阶压缩的一般性理论在各种不同条件下的特例.

1 各模压缩阶数不相等的 N_j 次方 Y 压缩的一般理论

1.1 不等阶 N_j 次方 Y 压缩的一般性定义

考虑频率为 $\omega_j(j=1,2,3,\cdots,q)$ 的多模辐射场，以 a_j^+、$a_j(j=1,2,3,\cdots,q)$ 分别表示多模辐射场中第 j 模光场的产生及湮没算符，则在相互作用绘景中

$$\left.\begin{aligned} a_j^+(t) &= \exp(-\mathrm{i}\omega_j t)\,a_j^+(0) \\ a_j(t) &= \exp(+\mathrm{i}\omega_j t)\,a_j(0) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位.令 $a_j^+(0)=a_j^+$，$a_j(0)=a_j$.于是，我们有

$$[a_j, a_{j'}^+] = a_j a_{j'}^+ - a_{j'}^+ a_j = \begin{cases} 1, & (j=j') \\ 0, & (j\neq j') \end{cases} \tag{2}$$

$$[a_j^{N_j}, a_{j'}^{+N_{j'}}] = a_j^{N_j} a_{j'}^{+N_{j'}} - a_{j'}^{+N_{j'}} a_j^{N_j} = \begin{cases} [a_j^{N_j}, a_j^{+N_j}] & (j=j') \\ 0 & (j\neq j') \end{cases} \tag{3}$$

$$[a_j^{N_j}, a_{j'}^{N_{j'}}] = 0 \quad (\text{对任意的 } j, j' \text{ 成立}) \tag{4}$$

$$[a_j^{+N_j}, a_{j'}^{+N_{j'}}] = 0 \quad (\text{对任意的 } j, j' \text{ 成立}) \tag{5}$$

定义两个厄密共轭算符

$$\left.\begin{aligned} A_q^+(N_j) &= q^{-1/2}\sum_{j=1}^{q} a_j^{+N_j} \\ A_q(N_j) &= q^{-1/2}\sum_{j=1}^{q} a_j^{N_j} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

显然 $[A_q^+(N_j)]^+ = A_q(N_j)$，$[A_q(N_j)]^+ = A_q^+(N_j)$.$A_q^+(N_j)$ 与 $A_q(N_j)$ 满足对易关系：

$$[A_q(N_j=1), A_q^+(N_j=1)] = 1 \tag{7a}$$

$$[A_q(N_j>1), A_q^+(N_j>1)] = q^{-1}\sum_{j=1}^{q}[a_j^{N_j}, a_j^{+N_j}] \tag{7b}$$

再定义两个正交厄密算符

$$\left.\begin{aligned} Y_1^q(N_j) &= 2^{-1}[A_q^+(N_j)+A_q(N_j)] = \frac{1}{2\sqrt{q}}\sum_{j=1}^{q}(a_j^{+N_j}+a_j^{N_j}) \\ Y_2^q(N_j) &= 2^{-1}\mathrm{i}[A_q^+(N_j)-A_q(N_j)] = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{q}}\sum_{j=1}^{q}(a_j^{+N_j}-a_j^{N_j}) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

显然 $[Y_1^q(N_j)]^+ = Y_1^q(N_j)$，$[Y_2^q(N_j)]^+ = Y_2^q(N_j)$.$Y_1^q(N_j)$ 与 $Y_2^q(N_j)$ 满足对易关系

$$[Y_1^q(N_j), Y_2^q(N_j)] = 2^{-1}\mathrm{i}[A_q(N_j), A_q^+(N_j)] = \frac{\mathrm{i}}{2q}\sum_{j=1}^{q}[a_j^{N_j}, a_j^{+N_j}] \tag{9}$$

于是，利用 Cauchy-Schwartz 不等式可导出测不准关系式[1,2,4,5]

$$\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q\rangle\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q\rangle \geqslant 16^{-1}|\langle[A_q(N_j), A_q^+(N_j)]\rangle|^2 \tag{10}$$

式中 $\langle \Delta Y_m^2(N_j)_q\rangle = \langle[Y_m^q(N_j)]^2\rangle - \langle Y_m^q(N_j)\rangle^2$，$m=1,2$.另外，式(10)还可以改写为

$$\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q\rangle\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q\rangle > 16^{-1}|\langle[A_q(N_j), A_q^+(N_j)]\rangle|^2 \tag{11}$$

$$\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q\rangle = \langle \Delta Y_2^2(N_j)_q\rangle = 16^{-1}|\langle[A_q(N_j), A_q^+(N_j)]\rangle|^2 \tag{12}$$

在式(11)中，如果对于 m 的取值之一有

$$\langle \Delta Y_m^2(N_j)_q\rangle < 4^{-1}\langle[A_q(N_j), A_q^+(N_j)]\rangle \tag{13}$$

或者

$$4\langle \Delta Y_m^2(N_j)_q\rangle - \langle[A_q(N_j), A_q^+(N_j)]\rangle < 0 \tag{14}$$

成立，则称多模辐射场的第 $m(m=1,2)$ 个正交分量存在着不等阶的 N_j 次方 Y 压缩效应.

根据式(14)，可将不等阶 N_j 次方 Y 压缩的压缩度 $S_{ym}^q(N_j)$ 定义为

$$S_{ym}^q(N_j) = \frac{4\langle \Delta Y_m^2(N_j)_q\rangle - \langle[A_q(N_j), A_q^+(N_j)]\rangle}{\langle[A_q(N_j), A_q^+(N_j)]\rangle} \tag{15}$$

式(15)是对式(14)的归一化描述，根据式(14)和式(15)可导出压缩度 $S_{ym}^q(N_j)$ 所满足的不等关系式

$$-1 \leqslant S_{ym}^q(N_j) < 0 \tag{16}$$

只要 $S_{Ym}^{q}(N_j)$ 在以上范围内取值,多模辐射场的第 m 个正交分量就必然会呈现出不等阶 N_j 次方 Y 压缩效应 .

需要指出的是,以上各式虽与文献 1 的式(6)～式(12a)在形式上相同,但其本质含义却明显不同 . 分析表明,本文提出的不等阶 N_j 次方 Y 压缩效应,可通过多模辐射场的简并或者非简并多波混频等非线性过程来产生 .

在式(13)、式(14)和式(16)中,如果 $N_j \neq N$ $(j=1,2,3,\cdots,q)$,则 $q \geqslant 2$、$N_j \geqslant 3$ 表示双模及多模辐射场的第 m 个正交分量存在广义非线性不等阶 N_j 次方 Y 压缩效应;如果 $N_j = N$ $(j=1,2,3,\cdots,q)$,则 $q \geqslant 2$、$N_j \geqslant 3$ 表示双模及多模辐射场的第 m 个正交分量存在广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩效应 . 可见,文献 1 所提出的 N 次方 Y 压缩的定义,仅仅是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 Y 压缩的这一一般性定义在 $N_j = N$ $(j=1,2,3,\cdots,q)$ 这一条件下的特例. 另外,在式(13)、式(14)和式(16)中,如果 $q=1$,$N_j = N_1 = N$,则当 $N \geqslant 3$ 时,其结果便过渡到了 Zhang 等人所提出的单模辐射场的振幅 N 次方压缩的定义[6] 上来 . 可见,Zhang 等人在国际上提出的单模辐射场的振幅 N 次方压缩的定义[6],仅仅是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 Y 压缩的这一一般性定义在 $q=1$,$N_j = N_1 = N$ 这一条件下的特例 . 因此,从这个意义上讲,本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 Y 压缩,可被看成是一种多模辐射场的广义非线性不等阶的振幅 N_j 次方压缩 .

1.2　不等阶 N_j-Y 最小测不准态与 N_j-Y 压缩最小测不准态的一般性定义

在式(12)中,如果

$$\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle = \langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle = 4^{-1}\langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle \tag{17}$$

或者

$$\begin{aligned} &4\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle - \langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle \\ &= 4\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle - \langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle \\ &\equiv 0 \end{aligned} \tag{18}$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle$ 这两者之积满足式(12),则称多模辐射场处于不等阶 N_j-Y 最小测不准态 .

在式(12)中,如果

$$\left.\begin{aligned} \langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle < 4^{-1}\langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle \\ \langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle > 4^{-1}\langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} 4\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle - \langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle < 0 \\ 4\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle - \langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle > 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle$ 这两者之积满足式(12),则称多模辐射场的第 1 正交分量处于广义非线性不等阶 N_j-Y 压缩最小测不准态.

在式(12)中,如果

$$\left.\begin{aligned} \langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle > 4^{-1}\langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle \\ \langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle < 4^{-1}\langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} 4\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle - \langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle > 0 \\ 4\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle - \langle [A_q(N_j), A_q^+(N_j)] \rangle < 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

并且 $\langle \Delta Y_1^2(N_j)_q \rangle$ 与 $\langle \Delta Y_2^2(N_j)_q \rangle$ 这两者之积满足式(12),则称多模辐射场的第 2 正交分量处于广义非线性不等阶 N_j-Y 压缩最小测不准态.

2　各模压缩阶数不相等的 N_j 次方 H 压缩的一般理论

2.1　不等阶 N_j 次方 H 压缩的一般性定义

根据式(1)～(5),我们还可以定义两个厄密共轭算符

$$\left.\begin{aligned} B_q^+(N_j) &= \sum_{j=1}^{q} a_j^{+N_j} \\ B_q(N_j) &= \sum_{j=1}^{q} a_j^{N_j} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

则有 $[B_q^+(N_j)]^+ = B_q(N_j)$,$[B_q(N_j)]^+ = B_q^+(N_j)$. $B_q^+(N_j)$ 与 $B_q(N_j)$ 满足对易关系

$$[B_q(N_j), B_q^+(N_j)] = \left[\sum_{j=1}^{q} a_j^{N_j}, \sum_{j=1}^{q} a_j^{+N_j}\right] \tag{24}$$

再定义两个正交厄密算符

$$\left.\begin{aligned} H_1^q(N_j) &= 2^{-1}[B_q^+(N_j) + B_q(N_j)] \\ &= 2^{-1}\left[\sum_{j=1}^{q} a_j^{+N_j} + \sum_{j=1}^{q} a_j^{N_j}\right] \\ H_2^q(N_j) &= 2^{-1}\mathrm{i}[B_q^+(N_j) - B_q(N_j)] \\ &= 2^{-1}\mathrm{i}\left[\sum_{j=1}^{q} a_j^{+N_j} - \sum_{j=1}^{q} a_j^{N_j}\right] \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

显然 $[H_1^q(N_j)]^+ = H_1^q(N_j)$,$[H_2^q(N_j)]^+ = H_2^q(N_j)$. 且 $H_1^q(N_j)$ 与 $H_2^q(N_j)$ 满足对易关系

$$\begin{aligned} [H_1^q(N_j), H_2^q(N_j)] &= 2^{-1}\mathrm{i}[B_q(N_j), B_q^+(N_j)] \\ &= 2^{-1}\mathrm{i}\left[\sum_{j=1}^{q} a_j^{N_j}, \sum_{j=1}^{q} a_j^{+N_j}\right] \end{aligned} \tag{26}$$

因此利用 Cauchy-Schwartz 不等式可导出测不准关系式[1,2,4,5]

$$\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle \geqslant 16^{-1}\left|\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle\right|^2 \quad (27)$$

式中$\langle \Delta H_m^2(N_j)_q\rangle=\langle[H_m^2(N_j)]^2\rangle-\langle H_m^q(N_j)\rangle^2$，$m=1,2$．同样地，式(27)可改写为

$$\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle > 16^{-1}\left|\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle\right|^2 \quad (28)$$

$$\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle = 16^{-1}\left|\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle\right|^2 \quad (29)$$

在式(28)中，如果对于m的取值之一有

$$\langle \Delta H_m^2(N_j)_q\rangle < 4^{-1}\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle \quad (30)$$

或者

$$4\langle \Delta H_m^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle<0 \quad (31)$$

成立，则称多模辐射场的第$m(m=1,2)$个正交分量存在不等阶N_j次方H压缩效应．

根据式(31)，我们可将不等阶N_j次方H压缩的压缩度$S_{hm}^q(N_j)$定义为

$$S_{hm}^q(N_j)=\frac{4\langle \Delta H_m^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle}{\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle} \quad (32)$$

同样地，式(32)也是对式(31)所进行的归一化描述．根据式(31)和式(32)可以导出压缩度$S_{hm}^q(N_j)$所满足的不等关系式

$$-1\leqslant S_{hm}^q(N_j)<0 \quad (33)$$

因此，当压缩度$S_{hm}^q(N_j)$在式(33)所表征的范围内取值时，多模辐射场的第m个正交分量必定呈现不等阶N_j次方H压缩效应．

式(23)～(33)虽在形式上与文献1的式(20)～(26d)相同，但其物理含义却截然不同．分析表明，本文提出的不等阶N_j次方H压缩效应，可通过多模辐射场的参量上转换即和频过程来产生．

在式(30)、式(31)和式(33)中，如果$N_j\neq N$ $(j=1,2,3,\cdots,q)$，则$q\geqslant2$、$N_j\geqslant3$表示双模及多模辐射场的第m个正交分量存在广义非线性不等阶N_j次方H压缩效应；如果$N_j=N(j=1,2,3,\cdots,q)$，则$q\geqslant2$、$N_j\geqslant3$表示双模及多模辐射场的第m个正交分量存在广义非线性等阶的N次方H压缩效应．可见，文献1所提出的N次方H压缩的定义，仅仅只是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶$N_j(j=1,2,3,\cdots,q)$次方H压缩的这一一般性定义在$N_j=N$这一条件下的特例．在式(30)、式(31)和式(33)中，如果$q=2$、$N_j=N_1=N_2=N=1$，其结果便过渡到了Mark Hillery在文献7中所提出的"双模和压缩"的定义上来．可见，Mark Hillery在国际上提出的"双模和压缩"的定义，仅仅是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶N_j次方H压缩的这一一般性定义在$q=2$、$N_j=N_1=N_2=1$这一条件下的特例．另外，在式(30)、式(31)和(33)中，如果$q=1$，$N_j=N_1=N$，则当$N\geqslant3$时，其结果再次过渡到了Zhang等人所提出的单模辐射场的振幅N次方压缩的定义[6]上来．可见，Zhang等人在国际上提出的单模辐射场的振幅N次方压缩的定义[6]，仅仅只是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶N_j次方H压缩的这一一般性定义在$q=1$、$N_j=N_1=N$这一条件下的特例．因此，本文提出的多模辐射场的广义非线性不等阶N_j次方H压缩，可被看成是一种多模辐射场的广义非线性不等阶高阶和压缩．

2.2 不等阶N_j-H最小测不准态与N_j-H压缩最小测不准态的一般性定义

在式(29)中，如果

$$\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle=\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle=4^{-1}\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle \quad (34)$$

或者

$$4\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle=4\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle\equiv0 \quad (35)$$

并且$\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle$与$\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle$这两者之积满足式(29)，则称多模辐射场处于不等阶N_j-H最小测不准态．

在式(29)中，如果

$$\left.\begin{aligned}\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle<4^{-1}\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle\\ \langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle>4^{-1}\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

或者

$$\left.\begin{aligned}4\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle<0\\ 4\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle>0\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

并且$\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle$与$\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle$这两者之积满足式(29)，则称多模辐射场的第1正交分量处于广义非线性不等阶N_j-H压缩最小测不准态．

在式(29)中，如果

$$\left.\begin{aligned}\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle>4^{-1}\langle[B_q(N_j,B_q^+(N_j)]\rangle\\ \langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle<4^{-1}\langle[B_q(N_j,B_q^+(N_j)]\rangle\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

或者

$$\left.\begin{aligned}4\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle>0\\ 4\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^+(N_j)]\rangle<0\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

并且$\langle \Delta H_1^2(N_j)_q\rangle$与$\langle \Delta H_2^2(N_j)_q\rangle$这两者之积满足式(29)，则称多模辐射场的第 2 正交分量处于广义非线性不等阶 N_j-H 压缩最小测不准态．

3　各模压缩阶数不相等的 N_j 次方 X 压缩的一般理论

3.1　不等阶 N_j 次方 X 压缩的一般性定义

考虑频率为 ω_j($j=1,2,3,\cdots,\cdots,q-1,q,q+1,\cdots,\cdots,2q-1,2q$；下同)的多模辐射场，以 a_j^+、a_j 分别表示多模辐射场中第 j 模光场的产生和湮没算符，则在相互作用绘景中 $a_j^+(t)=\exp(-\mathrm{i}\omega_j t)a_j^+$ 和 $a_j(t)=\exp(\mathrm{i}\omega_j t)a_j$．于是，我们有

$$[a_j,a_{j'}^+]=a_ja_{j'}^+-a_{j'}^+a_j=\begin{cases}1 & (j=j')\\ 0 & (j\neq j')\end{cases}\tag{40}$$

$$[a_j^{N_j},a_{j'}^{+N_{j'}}]=a_j^{N_j}a_{j'}^{+N_{j'}}-a_{j'}^{+N_{j'}}a_j^{N_j}=\begin{cases}[a_j^{N_j},a_j^{+N_j}] & (j=j')\\ 0 & (j\neq j')\end{cases}\tag{41}$$

定义两个厄密共轭算符

$$\left.\begin{aligned}C_q^+(N_{j_C})&=\sum_{j_C=1}^{q}a_{j_C}^{+N_{j_C}}\\ C_q(N_{j_C})&=\sum_{j_C=1}^{q}a_{j_C}^{N_{j_C}}\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

则 $C_q^+(N_{j_C})$ 和 $C_q(N_{j_C})$ 满足对易关系

$$[C_q(N_{j_C}),C_q^+(N_{j_C})]=\left[\sum_{j_C=1}^{q}a_{j_C}^{N_{j_C}},\sum_{j_C=1}^{q}a_{j_C}^{+N_{j_C}}\right]\tag{43}$$

再定义两个厄密共轭算符

$$\left.\begin{aligned}L_{2q}^+(N_{j_L})&=\sum_{j_L=q+1}^{2q}a_{j_L}^{+N_{j_L}}\\ L_{2q}(N_{j_L})&=\sum_{j_L=q+1}^{2q}a_{j_L}^{N_{j_L}}\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

则 $L_{2q}^+(N_j)$ 和 $L_{2q}(N_j)$ 也满足对易关系

$$[L_{2q}(N_{j_L}),L_{2q}^+(N_{j_L})]=\left[\sum_{j_L=q+1}^{2q}a_{j_L}^{N_{j_L}},\sum_{j_L=q+1}^{2q}a_{j_L}^{+N_{j_L}}\right]\tag{45}$$

定义两个正交厄密算符

$$\left.\begin{aligned}X_1^{2q}(N_j)&=2^{-1}[C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})+C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L})]\\ X_2^{2q}(N_j)&=2^{-1}\mathrm{i}[C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})-C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L})]\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

式中，$N_j\in[N_1,N_2,N_3,\cdots,N_{q-1},N_q,N_{q+1},\cdots,N_{2q-1},N_{2q}]$；下同．于是有

$$\left.\begin{aligned}[X_1^{2q}(N_j)]^+&=X_1^{2q}(N_j)\\ [X_2^{2q}(N_j)]^+&=X_2^{2q}(N_j)\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

并且，$X_1^{2q}(N_j)$ 和 $X_2^{2q}(N_j)$ 满足对易关系

$$\begin{aligned}&[X_1^{2q}(N_j),X_2^{2q}(N_j)]\\ &=2^{-1}\mathrm{i}[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\\ &=2^{-1}\mathrm{i}\left[\sum_{j_C=1}^{q}\sum_{j_L=q+1}^{2q}a_{j_C}^{+N_{j_C}}a_{j_L}^{N_{j_L}},\sum_{j_C=1}^{q}\sum_{j_L=q+1}^{2q}a_{j_C}^{N_{j_C}}a_{j_L}^{+N_{j_L}}\right]\end{aligned}\tag{48}$$

于是，利用 Cauchy-Schwartz 不等式即可导出测不准关系

$$\langle\Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle\langle\Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle\geqslant16^{-1}\cdot|\langle[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle|^2\tag{49}$$

式中$\langle\Delta X_m^2(N_j)_{2q}\rangle=\langle[X_m^{2q}(N_j)]^2\rangle-\langle X_m^{2q}(N_j)\rangle^2$；$m=1,2$.

另外，式(49)还可以进一步改写为

$$\langle\Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle\langle\Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle>16^{-1}\cdot|\langle[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle|^2\tag{50}$$

$$\langle\Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle\langle\Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle=16^{-1}\cdot|\langle[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle|^2\tag{51}$$

在式(50)中，如果对于 m 的取值之一有

$$\langle\Delta X_m^2(N_j)_{2q}\rangle<4^{-1}|\langle[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle|\tag{52}$$

或者

$$4\langle\Delta X_m^2(N_j)_{2q}\rangle-|\langle[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle|<0\tag{53}$$

成立，则称多模辐射场的第 m($m=1,2$)个正交分量存在不等阶 N_j 次方 X 压缩效应．

根据式(53)，我们可将不等阶 N_j 次方 X 压缩的压缩度 $S_{xm}^{2q}(N_j)$ 定义为

$$S_{xm}^{2q}(N_j)=\frac{4\langle\Delta X_m^2(N_j)_{2q}\rangle-|\langle[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle|}{|\langle[C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}),C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle|}\tag{54}$$

可以看出，式(54)是对式(53)所进行的归一化描述．由式(53)及式(54)可知，压缩度 $S_{xm}^{2q}(N_j)$ 的取值满足不等关系式

$$-1\leqslant S_{xm}^{2q}(N_j)<0\tag{55}$$

只要压缩度 $S_{xm}^{2q}(N_j)$ 在式(55)所表征的范围内取值，多模辐射场的第 m 个正交分量就必定呈现不等阶 N_j 次方 X 压缩效应．

值得强调的是，式(40)～(55)虽然与文献 4 的式(1)～(16)在形式上相同，但其物理含义却不相同；前者表征不等阶 N_j 次方 X 压缩，而后者则

表征等阶N次方X压缩．分析表明，本文提出的不等阶N_j次方X压缩效应，可通过多模辐射场的参量下转换即差频过程来产生．

在式(52)、式(53)和式(55)中，如果$N_j \neq N$ $(j=1,2,3,\cdots,2q)$，则$q \geqslant 1$、$N_j \geqslant 2$表示双模及多模辐射场的第m个正交分量存在广义非线性不等阶N_j次方X压缩效应；如果$N_j = N(j=1,2,3,\cdots,2q)$，则$q \geqslant 1$、$N_j \geqslant 2$就表示双模及多模辐射场的第$m$个正交分量存在着广义非线性等阶的$N$次方$X$压缩效应，这与文献4的研究结果一致．可见，文献4所提出的N次方X压缩的定义，仅仅是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶N_j次方X压缩的这一一般性定义在$N_j = N$这一条件下的特例．在式(52)、式(53)和式(55)中，如果$q=1$、$N_j = N_1 = N_2 = 1$，其结果便过渡到了Mark Hillery在文献7中所提出的"双模差压缩"的定义上来．可见，Mark Hillery在国际上提出的"双模差压缩"的定义，仅仅是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶N_j次方X压缩的这一一般性定义在$q=1$、$N_j = N_1 = N_2 = 1$这一条件下的特例．因此，从这个意义上讲，本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶N_j次方X压缩，可被看成是一种多模辐射场的广义非线性不等阶的高阶差压缩．

3.2 不等阶N_j-X最小测不准态与N_j-X压缩最小测不准态的一般性定义

在式(51)中，如果

$$\begin{aligned}&\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle = \langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle \\ &= 4^{-1}\left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right|\end{aligned} \tag{56}$$

或者

$$\begin{aligned}&4\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle - \left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| \\ &= 4\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle - \left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| \\ &\equiv 0\end{aligned} \tag{57}$$

并且$\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle$与$\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle$这两者之积满足式(51)，则称多模辐射场处于不等阶N_j-X最小测不准态．

在式(51)中，如果

$$\left.\begin{aligned}&\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle < 4^{-1}\left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| \\ &\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle > 4^{-1}\left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right|\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}&4\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle - \left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| < 0 \\ &4\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle - \left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| > 0\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

并且$\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle$与$\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle$这两者之积满足式(51)，则称多模辐射场的第1正交分量处于广义非线性不等阶N_j-X压缩最小测不准态．

在式(51)中，如果

$$\left.\begin{aligned}&\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle > 4^{-1}\left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| \\ &\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle < 4^{-1}\left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right|\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}&4\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle - \left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| > 0 \\ &4\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle - \left|\langle [C_q^+(N_{j_C})L_{2q}(N_{j_L}), C_q(N_{j_C})L_{2q}^+(N_{j_L})]\rangle\right| < 0\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

并且$\langle \Delta X_1^2(N_j)_{2q}\rangle$与$\langle \Delta X_2^2(N_j)_{2q}\rangle$这两者之积满足式(51)，则称多模辐射场的第2正交分量处于广义非线性不等阶N_j-X压缩最小测不准态．

4 结论

本文在发展现有的多模辐射场的广义非线性等阶高阶压缩理论[1~5]的基础上，进一步提出了多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论．给出N_j次方Y压缩、N_j次方H压缩和N_j次方X压缩的压缩度$S_{ym}^q(N_j)$ $S_{hm}^q(N_j)$和$S_{xm}^{2q}(N_j)$等的计算公式，并对不等阶N_j-Y最小测不准态、N_j-H最小测不准态和N_j-X最小测不准态以及不等阶N_j-Y压缩最小测不准态、N_j-H压缩最小测不准态和N_j-X压缩最小测不准态等进行了详细讨论．结果表明：

1) 对于双模及多模辐射场而言，N_j次方Y压缩、N_j次方H压缩和N_j次方X压缩是三种互相独立的广义非线性不等阶高阶压缩效应；它们无论在定义上、性质上还是在产生机制上都存在着严格的区别．同样地，N_j-Y最小测不准态、N_j-H最小测不准态和N_j-X最小测不准态这三种不等阶最小测不准态，以及N_j-Y压缩最小测不准态、N_j-H压缩最小测不准态和N_j-X压缩最小测

不准态这三种不等阶压缩最小测不准态等，均属于三种互相独立的不等阶最小测不准态和不等阶压缩最小测不准态；它们在定义上、性质上和产生机制上也存在着严格的区别.

2) 一般而言，不等阶 N_j 次方 Y 压缩效应可通过多模辐射场的简并或者非简并多波混频等非线性过程产生，不等阶 N_j 次方 H 压缩效应可通过多模辐射场的参量上转换即和频过程产生，不等阶 N_j 次方 X 压缩效应则可通过多模辐射场的参量下转换即差频过程产生.

3) 笔者在文献 1 中所提出的多模辐射场的广义非线性等阶 N 次方 Y 压缩的定义，仅仅只是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 Y 压缩的这一一般性定义在 $N_j=N$ 这一条件下的特例. 而 Zhang 等人在国际上提出的单模辐射场的振幅 N 次方压缩的定义，则是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 Y 压缩的这一一般性定义在 $q=1$、$N_j=N_1=N$ 这一条件下的特例.

4) 笔者在文献 1 中所提出的多模辐射场的广义非线性等阶 N 次方 H 压缩的定义，仅仅只是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 H 压缩的这一一般性定义在 $N_j=N$ 这一条件下的特例. Mark Hillery 在国际上提出的"双模和压缩"的定义，仅仅只是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 H 压缩的这一一般性定义在 $q=2$、$N_j=N_1=N_2=1$ 这一条件下的特例. 而 Zhang 等人在国际上提出的单模辐射场的振幅 N 次方压缩的定义，则是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 H 压缩的这一一般性定义在 $q=1$、$N_j=N_1=N$ 这一条件下的特例.

5) 笔者在文献 4 中所提出的多模辐射场的广义非线性等阶 N 次方 X 压缩的定义，仅仅只是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 X 压缩的这一一般性定义在 $N_j=N$ 这一条件下的特例. 而 Mark Hillery 在国际上提出的"双模差压缩"的定义，则是本文所提出的多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 X 压缩的这一一般性定义在 $q=1$、$N_j=N_1=N_2=1$ 这一条件下的特例.

参考文献

1 杨志勇，侯洵. 一种双模叠加态光场的两种非线性高阶压缩效应. 光子学报，1998，27(4)：289～299

2 侯洵，杨志勇. 第Ⅰ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究. 光子学报，1998，27(10)：865～879

3 杨志勇，侯洵. 第Ⅱ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究. 光子学报，1998，27(11)：961～974

4 杨志勇，侯洵. 多模辐射场的广义非线性高阶差压缩—N 次方 X 压缩的一般理论. 光子学报，1998，27(12)：1065～1069

5 杨志勇，侯洵. 量子体系中的时域压缩-频域展宽正、逆效应及其非经典性. 光子学报，1998，27(9)：769～777

6 Zhang Z M，Xu Lei，Chai Jinlin，Li Fuli. A new kind of higher-order squeezing of radiation field. Phys Lett(A)，1990，A150(1)：27～30

7 Mark Hillery. Sum and difference squeezing of the electromagnetic field. Phys Rev(A)，1989，A40(6)：3147～3155

8 杨志勇，侯洵. 量子光学领域中的若干重大进展. 新世纪科学论坛，西安：陕西科学技术出版社，1999：125～139

GENERAL THEORY ON GENERALIZED NONLINEAR UNEQUELLED-ORDER HIGHER-ORDER SQUEEZING OF MULTI-MODE RADIATIVE LIGHT FIELD*

Yang Zhiyong[1], Hou Xun[1,2,3]

1 *Institute of Photonics & Photon-Technology, and Provincial Key Laboratory of Photoelectronic Technology, Northwest University, Xi'an, 710069, P·R·China*

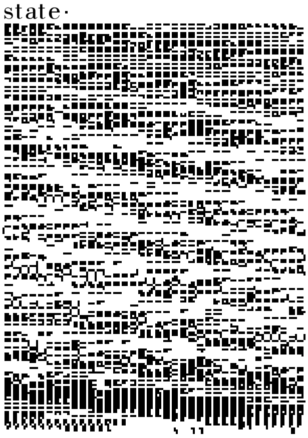
2 *Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, the Academy of Sciences of China, Xi'an, 710068, P·R·China*

3 *State Key Laboratory of Transient Optical Technology, Xi'an, 710068, P·R·China*

Received date: 1999－02－05

Abstract In this paper, the general theory of generalized nonlinear unequalled-order higher-order squeezing of multi-mode radiative light field is further constructed by Yang Zhiyong and Hou Xun, that is based upon developing the current theory of generalized nonlinear equal-order higher-order squeezing of multi-mode radiative light field established by Yang Zhiyong and Hou Xun and published in Acta Photonica Sinica in 1998 recently. The general definitions of N_j-th power Y-squeezing, N_j-th power H-squeezing and N_j-th power X-squeezing of multi-mode radiative light field, in which the squeezed order of each mode is unequalled, are proposed firstly, and then the unequalled-order N_j-Y minimum uncertainty state, the unequalled-order N_j-Y squeezed minimum uncertainty state, the unequalled-order N_j-H minimum uncertainty state, the unequalled-order N_j-H squeezed minimum uncertainty state, the unequalled-order N_j-X minimum uncertainty state and the unequalled-order N_j-X squeezed minimum uncertainty state are discussed respectively in detail. The results show that the definition of amplitude N-th power squeezing of single-mode radiative light field that is suggested by Zhang Z·M·et al and published in Phys·Lett·(A), 1990, Vol·150, No·1, the definitions of both sum and difference squeezing of two-mode radiative light field presented by Mark Hillery in Phys·Rev·(A), 1989, Vol·40, No·6, and also the definitions of N-th power Y-squeezing, N-th power H-squeezing and N-th power X-squeezing, proposed by Yang Zhiyong and Hou Xun mentioned above, of multi-mode radiative light field in which the squeezed order of each mode is equivalent, are only the specific examples of the definitions of N_j-th power Y-squeezing, N_j-th power H-squeezing and N_j-th power X-Squeezing of this paper under different conditions.

Keywords Multi-mode radiative light field; Generalized nonlinear unequalled-order higher-order squeezing; N_j-th power Y-squeezing; N_j-th power H-squeezing; N_j-th power X-squeezing; Squeezed degree; Unequalled-order minimum uncertainty state; Unequalled-order squeezed minimum uncertainty state.



Yang Zhiyoug was born on January 12, 1962, in Tongguan County, Shaanxi Province, P·R·China. He earned B·Sc·in laser physics and M·Sc·in optics from Northwest University in 1983 and 1992 respectively, From 1983 to 1985, he was an assistant at Northwestern University of Agriculture. Form 1986 to the August of 1996, he worked at Weinan Normal College as an assistant and a lecturer, respectively. Since the September of 1996, he has joined Northwest University, and also he has been a Ph·D·candidate in optics at the same University. Now as a specific scientific research worker, he works at Institute of Photonics & Photon-Techndogy and Provincial Key Laboratory of Photoelectronic Technology of Northwest University. Currently he has been an associate professor. And his major research fields include laser physics, Gaussian laser beam optics, nonlinear optics, quantum optics, transient optics and photonics.

* Supported by the funds of both the natural science of Shaanxi Province and the specialized scientific research of Educational Committee of Shaanxi Province·P·R·China·