第 28 卷第 8 期　光子学报　Vo1.28 No.8
1999 年 8 月　ACTA PHOTONICA SINICA　August 1999

多模复共轭奇、偶相干态光场的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩*

许定国[1,2]　侯　瑶[3]　王菊霞[4]　杨志勇[1]　侯　洵[1,5]

(1 西北大学光子学与光子技术研究所,西北大学光电子技术省级重点开放实验室,西安 710069)
(2 陕西省商洛师范专科学校物理系,商州 726000)
(3 西北大学物理学系,西安 710069)
(4 渭南师范专科学校量子光学与光子学研究室,渭南 714000)
(5 中国科学院西安光学精密机械研究所瞬态光学技术国家重点实验室,西安 710068)

摘　要　利用新近提出的多模辐射场的广义非线性等阶高阶压缩理论,对多模复共轭奇、偶相干态光场的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩特性进行了详细研究．结果发现:①多模复共轭奇相干态光场,压缩阶数 N 为偶数时,只存在 N-Y 最小测不准态;而当腔模总数 q 与压缩阶数的乘积 $q \cdot N$ 为偶数时,只存在 N-H 最小测不准态;此外,无论 N 及 $q \cdot N$ 为何值,不呈现 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩效应．②多模复共轭偶相干态光场在一定条件下可呈现出周期性变化的任意阶的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩效应．③多模偶相干态光场与多模复共轭偶相干态光场两者的压缩效果和压缩特性完全相同,这种现象称为"压缩简并".

关键词　多模复共轭奇相干态;多模复共轭偶相干态;N-Y 最小测不准态;N-H 最小测不准态;N 次方 Y 压缩;N 次方 H 压缩;压缩简并

0　引言

新近建立的多模辐射场的广义非线性等阶与不等阶高阶压缩理论[1~6,14],从理论上将现有的单、双模辐射场的压缩及高阶压缩理论[9~13]统一到了一个更为普遍的多模压缩态理论体系之中,进而揭示出了单、双模压缩态光场所不具有的一系列更加丰富多彩的新的非经典现象[7~8]．这标志着光场压缩态领域的研究工作已经步入到一个全新的发展阶段——多模压缩态阶段．应该指出的是,这一理论发展不仅具有重要的学术价值,而且还为人们进一步开展多模压缩态领域的实验研究以及多模光压缩器件的研制与开发等奠定了坚实的理论基础．

本文根据文献 1～3 所建立的多模辐射场的广义非线性等阶高阶压缩理论,对多模复共轭奇、偶相干态光场中的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩特性以及 N-Y 最小测不准态和 N-H 最小测不准态等进行了详细研究．

多模偶相干态光场与多模复共轭偶相干态光场两者的压缩效果和压缩特性完全相同,这种现象称为"压缩简并"．应该指出的是:"压缩简并",是迄今为止在压缩态领域中未曾见有任何报道的一种新的物理现象．这种现象揭示出这样的结果:即在多模压缩态领域中,两个截然不同的多模量子光场态其压缩特性和压缩效果有可能完全相同．关于这一现象在实际中能否实现,以及导致这一结果的物理机制及其物理本质问题等尚有待于进一步研究;同时,本文还进一步讨论了消除"压缩简并"现象的基本途径.

* 陕西省自然科学基金和陕西省教委专项科研基金资助项目
收稿日期:1999－06－28

1 多模复共轭奇、偶相干态光场的基本结构

多模(q 模) 相干态 $|\{Z_j\}\rangle_q$ 的复共轭相干态 $|\{Z_j^*\}\rangle_q$ 与复共轭相干态的相反态 $|\{-Z_j^*\}\rangle_q$ 是宏观上可分辨的量子态，利用态 $|\{Z_j^*\}\rangle_q$ 与其相反态 $|\{-Z_j^*\}\rangle_q$ 的线性叠加，可构造多模复共轭奇相干态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q$ 和多模复共轭偶相干态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$，态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q$ 与态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 实质上都属于多模 Schrödinger 猫态 .

1.1 多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q$ 的基本结构

态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q$ 的数学表达式为

$$|\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q = C_q^{(\mathrm{o})}\{|\{Z_j^*\}\rangle_q - |\{-Z_j^*\}\rangle_q\} \tag{1}$$

它所满足的正交归一化条件为

$${}_q\langle\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}|\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q = 2|C_q^{(\mathrm{o})}|^2\left[1-\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\right] = 1$$

即

$$C_q^{(\mathrm{o})} = 2^{-1/2}\left[1-\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\right]^{-1/2} \tag{2}$$

式中

$$Z_j^* = R_j\exp(-\mathrm{i}\varphi_j)\quad (j=1,2,3,\cdots,q) \tag{3}$$

1.2 多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的基本结构

态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的数学表达式为

$$|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q = C_q^{(\mathrm{e})}\{|\{Z_j^*\}\rangle_q + |\{-Z_j^*\}\rangle_q\} \tag{4}$$

它所满足的正交归一化条件为

$${}_q\langle\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q = 2|C_q^{(\mathrm{e})}|^2\left[1+\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\right] = 1$$

即

$$C_q^{(\mathrm{e})} = 2^{-1/2}\left[1+\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\right]^{-1/2} \tag{5}$$

式中 $Z_j^* = R_j\exp(-\mathrm{i}\varphi_j)\quad (j=1,2,3,\cdots,q)$

且有

$$\left.\begin{aligned}
|Z_j^*\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|Z_j|^2\right)\cdot\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{Z_j^{*n_j}}{\sqrt{n_j!}}|n_j\rangle\\
|-Z_j^*\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|Z_j|^2\right)\cdot\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n_j}Z_j^{*n_j}}{\sqrt{n_j!}}|n_j\rangle
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_j|0_j\rangle &= 0\\
a_j|Z_j^*\rangle &= Z_j^*|Z_j^*\rangle\\
a_j|-Z_j^*\rangle &= -Z_j^*|-Z_j^*\rangle\\
a_j^N|Z_j^*\rangle &= Z_j^{*N}|Z_j^*\rangle\\
a_j^N|-Z_j^*\rangle &= (-1)^N Z_j^{*N}|-Z_j^*\rangle
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
\langle Z_j^{*\prime}|Z_j^*\rangle &= \exp[-2^{-1}(|Z_j'|^2+|Z_j|^2+Z_j'\cdot Z_j^*)]\\
\langle Z_j^{*\prime}|-Z_j^*\rangle &= \exp[-2^{-1}(|Z_j'|^2+|Z_j|^2-Z_j'\cdot Z_j^*)]\\
\langle -Z_j^{*\prime}|Z_j^*\rangle &= \exp[-2^{-1}(|Z_j'|^2+|Z_j|^2-Z_j'\cdot Z_j^*)]\\
\langle -Z_j^{*\prime}|-Z_j^*\rangle &= \exp[-2^{-1}(|Z_j'|^2+|Z_j|^2+Z_j'\cdot Z_j^*)]
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$
\left.\begin{aligned}
|\{Z_j^*\}\rangle_q &= |Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*, \cdots, Z_j^*, \cdots, Z_{q-1}^*, Z_q^*\rangle \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}|Z_j|^2\right)\right]\cdot\sum_{\{n_j\}=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{q}\frac{Z_j^{*n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right]|\{n_j\}\rangle_q \\
|\{-Z_j^*\}\rangle_q &= |-Z_1^*, -Z_2^*, -Z_3^*, \cdots, -Z_j^*, \cdots, -Z_{q-1}^*, -Z_q^*\rangle \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}|Z_j|^2\right)\right]\cdot\sum_{\{n_j\}=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{q}\frac{(-Z_j^*)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right]|\{n_j\}\rangle_q
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_j|\{Z_j^*\}\rangle_q &= Z_j^*|\{Z_j^*\}\rangle_q \\
a_j|\{-Z_j^*\}\rangle_q &= -Z_j^*|\{-Z_j^*\}\rangle_q \\
a_j^N|\{Z_j^*\}\rangle_q &= Z_j^{*N}|\{Z_j^*\}\rangle_q \\
a_j^N|\{-Z_j^*\}\rangle_q &= (-1)^N Z_j^{*N}|\{-Z_j^*\}\rangle_q
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^{q}a_j\right]|\{Z_j^*\}\rangle_q &= \left[\prod_{j=1}^{q}Z_j^*\right]|\{Z_j^*\}\rangle_q \\
\left[\prod_{j=1}^{q}a_j\right]|\{-Z_j^*\}\rangle_q &= (-1)^q\left[\prod_{j=1}^{q}Z_j^*\right]|\{-Z_j^*\}\rangle_q \\
\left[\prod_{j=1}^{q}a_j^N\right]|\{Z_j^*\}\rangle_q &= \left[\prod_{j=1}^{q}Z_j^{*N}\right]|\{Z_j^*\}\rangle_q \\
\left[\prod_{j=1}^{q}a_j^N\right]|\{-Z_j^*\}\rangle_q &= (-1)^{qN}\left[\prod_{j=1}^{q}Z_j^{*N}\right]|\{-Z_j^*\}\rangle_q
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
{}_q\langle\{Z_j^{*\prime}\}|\{Z_j^*\}\rangle_q &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}\left(|Z_j'|^2+|Z_j|^2\right)+Z_j'\cdot Z_j^*\right]\right\} \\
{}_q\langle\{Z_j^{*\prime}\}|\{-Z_j^*\}\rangle_q &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}\left(|Z_j'|^2+|Z_j|^2\right)-Z_j'\cdot Z_j^*\right]\right\} \\
{}_q\langle\{-Z_j^{*\prime}\}|\{Z_j^*\}\rangle_q &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}\left(|Z_j'|^2+|Z_j|^2\right)-Z_j'\cdot Z_j^*\right]\right\} \\
{}_q\langle\{-Z_j^{*\prime}\}|\{-Z_j^*\}\rangle_q &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}\left(|Z_j'|^2+|Z_j|^2\right)+Z_j'\cdot Z_j^*\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

式中 $|\{n_j\}\rangle_q = |n_1, n_2, n_3, \cdots, n_j, \cdots, n_{q-1}, n_q\rangle$，$\{n_j\} = n_1, n_2, n_3, \cdots, n_j, \cdots, n_{q-1}, n_q$．$a_j\,(j=1,2,3,\cdots,q)$ 为第 j 模光场的光子湮没算符，q 为光场的腔模(纵模)总数．

2　多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)}, \mathrm{o}\rangle_q$ 中的 N-Y 最小测不准态与 N-H 最小测不准态

对于态 $|\Psi_*^{(2)}, \mathrm{o}\rangle_q$ 而言，根据文献[1、2]中关于 N-Y 最小测不准态与 N-H 最小测不准态的定义，并利用本文的式(1)～(12)，经过大量的繁复计算可得

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta Y_1^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle \\
&=\frac{1}{q}\left\{2\left\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^N\right\rangle+\left\langle\sum_{j,j'=1}^{q}\left(a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+a_j^N a_{j'}^N\right)\right\rangle-\left\langle\sum_{j=1}^{q}\left(a_j^{+N}+a_j^N\right)\right\rangle^2\right\} \\
&=\frac{1}{q}\left\{4|C_q^{(\mathrm{o})}|^2\left[1-(-1)^N\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^N R_{j'}^N\cos N(\varphi_j-\varphi_{j'})\right]\right. \\
&\quad\left.+2\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\cos(2N\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^N R_{j'}^N\cos N(\varphi_j+\varphi_{j'})\right]-\left[1+(-1)^N\right]^2\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\cos(N\varphi_j)\right]^2\right\}
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle \\
&=\frac{1}{q}\left\{2\left\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^N\right\rangle-\left\langle\sum_{j,j'=1}^{q}\left(a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+a_j^N a_{j'}^N\right)\right\rangle+\left\langle\sum_{j=1}^{q}\left(a_j^{+N}-a_j^N\right)\right\rangle^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{q}\Big\{4|C_q^{(o)}|^2\Big[1-(-1)^N\exp\Big(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\Big)\Big]\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^NR_{j'}^N\cos N(\varphi_j-\varphi_{j'})\Big]$$

$$-2\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\cos(2N\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^NR_{j'}^N\cos N(\varphi_j+\varphi_{j'})\Big]-[1+(-1)^N]^2\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\sin(N\varphi_j)\Big]^2\Big\} \quad (14)$$

$$4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle$$

$$=2\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^N\Big\rangle+\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^Na_{j'}^N\Big\rangle-\Big\langle\sum_{j=1}^{q}a_j^{+N}+\sum_{j=1}^{q}a_j^N\Big\rangle^2$$

$$=\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\cdot\Big\{4|C_q^{(o)}|^2\cdot\Big[1-(-1)^{qN}\exp\Big(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\Big)\Big]$$

$$+2\cos\Big(2N\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)-[1+(-1)^{qN}]^2\cdot\cos^2\Big(N\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)\Big\} \quad (15)$$

$$4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle$$

$$=2\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^N\Big\rangle-\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^Na_{j'}^N\Big\rangle+\Big\langle\sum_{j=1}^{q}a_j^{+N}-\sum_{j=1}^{q}a_j^N\Big\rangle^2$$

$$=\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\cdot\Big\{4|C_q^{(o)}|^2\cdot\Big[1-(-1)^{qN}\exp\Big(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\Big)\Big]$$

$$-2\cos\Big(2N\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)-[1+(-1)^{qN}]^2\cdot\sin^2\Big(N\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)\Big\} \quad (16)$$

2.1 多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},o\rangle_q$ 中的 N-Y 最小测不准态

当 $N=2p\,(p=1,2,3,\cdots)$ 即 N 为偶数时，式(13)和式(14)可进一步化简为

$$4\langle\Delta Y_1^2(2p)\rangle-\langle[A_q(2p),A_q^+(2p)]\rangle$$

$$=\frac{4}{q}\Big\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{4p}\cos^2(2p\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^{2p}R_{j'}^{2p}\cos(2p\varphi_j)\cos(2p\varphi_{j'})-\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p}\cos(2p\varphi_j)\Big]^2\Big\}\equiv0 \quad (17)$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(2p)_q\rangle-\langle[A_q(2p),A_q^+(2p)]\rangle$$

$$=\frac{4}{q}\Big\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{4p}\sin^2(2p\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^{2p}R_{j'}^{2p}\sin(2p\varphi_j)\sin(2p\varphi_{j'})-\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p}\sin(2p\varphi_j)\Big]^2\Big\}\equiv0 \quad (18)$$

这就充分表明：无论腔模总数 q、压缩参数 R_j、各模初始相位 φ_j 以及几率幅 $C_q^{(o)}$ 等如何变化，只要压缩阶数 N 为偶数时，多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},o\rangle_q$ 就恒处于 N-Y 最小测不准态．

而当 $N=2p'+1\,(p'=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$ 即 N 为奇数时，式(14)、(15)又可写成

$$4\langle\Delta Y_1(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle$$

$$=\frac{8}{q}|C_q^{(o)}|^2\Big\{\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{(2p'+1)}\sin(2p'+1)\varphi_j\Big]^2+\exp\Big(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\Big)\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{(2p'+1)}\cos(2p'+1)\varphi_j\Big]^2\Big\} \quad (19)$$

$$4\langle\Delta Y_2(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle$$

$$=\frac{8}{q}|C_q^{(o)}|^2\Big\{\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{(2p'+1)}\sin(2p'+1)\varphi_j\Big]^2+\exp\Big(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\Big)\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{(2p'+1)}\cos(2p'+1)\varphi_j\Big]^2\Big\} \quad (20)$$

可以看出，以上两式均由两项实数的平方和构成，而 $|C_q^{(o)}|^2$ 与 q 亦均为有限的正实数，所以式(19)及式(20)恒大于零．这说明，无论 q、φ_j、R_j、$C_q^{(o)}$ 以及 N 如何变化，只要压缩阶数 N 为奇数，多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},o\rangle_q$ 既不处于 N-Y 最小测不准态，也不呈现 N 次方 Y 压缩效应．

2.2 多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},o\rangle_q$ 的 N-H 最小测不准态

当 $q\cdot N=2p\,(p=1,2,3,\cdots,\cdots)$ 即腔模总数 q 与压缩阶数 N 这两者之积 $q\cdot N$ 为偶数时，式(15)及式(16)可进一步简化为

$$4\langle\Delta H_1^2(2p/q)_q\rangle-\langle[B_q(2p/q),B_q^+(2p/q)]\rangle$$

$$=2\sum_{j=1}^{q}R_j^{4p/q}\cdot\Big\{1+\cos\Big[\frac{4p}{q}\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)\Big]-2\cos^2\Big[\frac{2p}{q}\Big(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\Big)\Big]\Big\}\equiv0 \quad (21)$$

$$4\langle\Delta H_2^2(2p/q)_q\rangle-\langle[B_q(2p/q),B_q^+(2p/q)]\rangle$$

$$= 2\sum_{j=1}^{q} R_j^{4p/q} \cdot \left\{1-\cos\left[\frac{4p}{q}\left(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right)\right] - 2\sin^2\left[\frac{2p}{q}\left(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right)\right]\right\} \equiv 0 \qquad (22)$$

这又充分说明：只要 $q\cdot N$ 取偶数，态 $|\Psi_*^{(2)},o\rangle_q$ 就恒处于 N-H 最小测不准态，而与压缩参数 N、几率幅 $C_q^{(o)}$ 以及各模初始相位之和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 等的取值情况无关．

与 N-Y 最小测不准态不同的是，N-H 最小测不准态不仅对 q 和 N 的取值有严格限制，而且对这两者之积 $q\cdot N$ 的取值情况也有严格限制．其具体限制条件为

1) q 为奇数、N 为偶数，从而使得 $q\cdot N$ 为偶数，即

$$\left.\begin{array}{ll} q=2p_q+1 & (p_q=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \\ N=2p_N & (p_N=1,2,3,\cdots,\cdots) \\ q\cdot N=2p_N(2p_q+1)=2p & (p=1,2,3,\cdots,\cdots) \end{array}\right\} \qquad (23)$$

2) q 为偶数，N 为奇数，从而使得 $q\cdot N$ 为偶数，即

$$\left.\begin{array}{ll} q=2p_q & (p_q=1,2,3,\cdots,\cdots) \\ N=2p_N+1 & (p_N=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \\ q\cdot N=2p_q(2p_N+1)=2p & (p=1,2,3,\cdots,\cdots) \end{array}\right\} \qquad (24)$$

3) q 为偶数，N 为偶数，从而使得 $q\cdot N$ 为偶数，即

$$\left.\begin{array}{ll} q=2p_q & (p_q=1,2,3,\cdots,\cdots) \\ N=2p_N & (p_N=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \\ q\cdot N=4p_qp_N=2p & (p=2,4,6,\cdots,\cdots) \end{array}\right\} \qquad (25)$$

4) 当 q 为奇数，N 为奇数，从而使两者之积 $q\cdot N$ 为奇数时，即

$$\left.\begin{array}{ll} q=2p'_q+1 & (p'_q=1,2,3,\cdots,\cdots) \\ N=2p'_N+1 & (p'_N=1,2,3,\cdots,\cdots) \\ q\cdot N=(2p'_q+1)(2p'_N+1)=2p'+1 & (p'=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \end{array}\right\} \qquad (26)$$

在这种情况下，式(15)和式(16)可化简为

$$4\left\langle \Delta H_1^2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)_q\right\rangle - \left\langle\left[B_q\left(\frac{2p'+1}{q}\right), B_q^+\left(\frac{2p'+1}{q}\right)\right]\right\rangle$$
$$= 8|C_q^{(o)}|^2\sum_{j=1}^{q}R_j^{2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)}\left\{\left[\cos\left(\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right)\right]^2+\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\left[\sin\left(\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right)\right]^2\right\} \qquad (27)$$

$$4\left\langle \Delta H_2^2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)_q\right\rangle - \left\langle\left[B_q\left(\frac{2p'+1}{q}\right), B_q^+\left(\frac{2p'+1}{q}\right)\right]\right\rangle$$
$$= 8|C_q^{(o)}|^2\sum_{j=1}^{q}R_j^{2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)}\left\{\left[\sin\left(\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right)\right]^2+\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\left[\cos\left(\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right)\right]^2\right\} \qquad (28)$$

可以看出：它们也是由两项实数的平方和构成，且两项不可能同时为零．又因 $C_q^{(o)}$ 及 R_j 均为有限的正实数，故式(27)和式(28)均大于零．故当条件式(26)成立时，多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},o\rangle_q$ 既不处于 N-H 最小测不准态，也不会呈现 N 次方 H 压缩效应．

值得注意的是，本文对多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},o\rangle_q$ 中的 N-Y 最小测不准态与 N-H 最小测不准态的讨论结果与文献 7 所给出的有关多模奇相干态光场 $|\Psi^{(2)},o\rangle_q$ 中的 N-Y 最小测不准态与 N-H 最小测不准态的各相应结果和结论完全相同，这其中的原因有待进一步揭示．

3　多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},e\rangle_q$ 中的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩效应

对于多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},e\rangle_q$ 而言，根据文献 1，2 所提出的有关定义，并利用本文的式(1)～(12)经过大量的繁复计算，同理可得

$$4\langle \Delta Y_1^2(N)_q\rangle - \langle[A_q(N), A_q^+(N)]\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{q}\Big\{2\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{N}\Big\rangle+\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+a_j^{N}a_{j'}^{N}\Big\rangle-\Big\langle\sum_{j=1}^{q}(a_j^{+N}+a_j^{N})\Big\rangle^2\Big\}\\
&=\frac{1}{q}\Big\{4|C_q^{(e)}|^2\cdot\Big[1+(-1)^N\exp(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2)\Big]\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^NR_{j'}^N\cos N(\varphi_j-\varphi_{j'})\Big]\\
&\quad+2\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\cos(2N\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^NR_{j'}^N\cos N(\varphi_j+\varphi_{j'})\Big]-[1+(-1)^N]^2\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\cos(N\varphi_j)\Big]^2\Big\}
\end{aligned}\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta Y_2^2(N)_q\rangle-\langle[A_q(N),A_q^+(N)]\rangle\\
&=\frac{1}{q}\Big\{2\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{N}\Big\rangle-\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+a_j^{N}a_{j'}^{N}\Big\rangle+\Big\langle\sum_{j=1}^{q}(a_j^{+N}-a_j^{N})\Big\rangle^2\Big\}\\
&=\frac{1}{q}\Big\{4|C_q^{(e)}|^2\cdot\Big[1+(-1)^N\exp(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2)\Big]\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^NR_{j'}^N\cos N(\varphi_j-\varphi_{j'})\Big]\\
&\quad-2\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\cos(2N\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^NR_{j'}^N\cos N(\varphi_j+\varphi_{j'})\Big]-[1+(-1)^N]^2\cdot\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^N\sin(N\varphi_j)\Big]^2\Big\}
\end{aligned}\tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta H_1^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle\\
&=2\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{N}\Big\rangle+\Big\langle\Big(\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{N}a_{j'}^{N}\Big)\Big\rangle-\Big\langle\Big(\sum_{j=1}^{q}a_j^{N}+\sum_{j'=1}^{q}a_{j'}^{N}\Big)\Big\rangle^2\\
&=\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\Big\{4|C_q^{(e)}|^2\cdot\Big[1+(-1)^{qN}\exp(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2)\Big]+2\cos\Big[2N(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big]\\
&\quad-[1+(-1)^{qN}]^2\cos^2\Big[N(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big]\Big\}
\end{aligned}\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta H_2^2(N)_q\rangle-\langle[B_q(N),B_q^+(N)]\rangle\\
&=2\Big\langle\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{N}\Big\rangle-\Big\langle\Big(\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N}a_{j'}^{+N}+\sum_{j,j'=1}^{q}a_j^{N}a_{j'}^{N}\Big)\Big\rangle+\Big\langle\Big(\sum_{j=1}^{q}a_j^{+N}-\sum_{j'=1}^{q}a_{j'}^{N}\Big)\Big\rangle^2\\
&=\sum_{j=1}^{q}R_j^{2N}\Big\{4|C_q^{(e)}|^2\cdot\Big[1+(-1)^{qN}\exp(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2)\Big]-2\cos\Big[2N(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big]\\
&\quad-[1+(-1)^{qN}]^2\sin^2\Big[N(\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big]\Big\}
\end{aligned}\tag{32}
$$

3.1 多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 中的两种最小测不准态

3.1.1 态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 中的 N-Y 最小测不准态

当 $N=2p\,(p=1,2,3,\cdots,\cdots)$ 即压缩阶数 N 为偶数时，式(29)与式(30)可以进一步化简为

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta Y_1^2(2p)\rangle-\langle[A_q(2p),A_q^+(2p)]\rangle\\
&=\frac{4}{q}\Big\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{4p}\cos^2(2p\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^{2p}R_{j'}^{2p}\cos(2p\varphi_j)\cos(2p\varphi_{j'})-\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p}\cos(2p\varphi_j)\Big]^2\Big\}\equiv0
\end{aligned}\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta Y_2^2(2p)\rangle-\langle[A_q(2p),A_q^+(2p)]\rangle\\
&=\frac{4}{q}\Big\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{4p}\sin^2(2p\varphi_j)+2\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{j'=j+1}^{q}R_j^{2p}R_{j'}^{2p}\sin(2p\varphi_j)\sin(2p\varphi_{j'})-\Big[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p}\sin(2p\varphi_j)\Big]^2\Big\}\equiv0
\end{aligned}\tag{34}
$$

以上两式表明：无论 q、R_j、φ_j 以及 $C_q^{(e)}$ 等如何变化，只要 N 为偶数，态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 就恒处于 N-Y 最小测不准态．

3.1.2 态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 中的 N-H 最小测不准态

当 $q\cdot N=2p\,(p=1,2,3,\cdots,\cdots)$ 即 $q\cdot N$ 为偶数时，式(31)与式(32)可化简为

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta H_1^2(2p/q)_q\rangle-\langle[B_q(2p/q),B_q^+(2p/q)]\rangle=2\sum_{j=1}^{q}R_j^{4p}\Big\{\Big[1+\cos(4p\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big]-2\cos^2(2p\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big\}\\
&\equiv0
\end{aligned}\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\langle\Delta H_2^2(2p/q)_q\rangle-\langle[B_q(2p/q),B_q^+(2p/q)]\rangle=2\sum_{j=1}^{q}R_j^{4p}\Big\{\Big[1-\cos(4p\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big]-2\sin^2(2p\sum_{j=1}^{q}\varphi_j)\Big\}\\
&\equiv0
\end{aligned}\tag{36}
$$

可以看出：只要腔模总数 q 与压缩阶数 N 这两者之积 $q\cdot N$ 为偶数，态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 就恒处于 N-H 最小测不准态．N-H 最小测不准态与 R_j、$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 以及 $C_q^{(\mathrm{o})}$ 等的取值情况无关．与 N-Y 最小测不准态最重要的区别是，N-H 最小测不准态对 q、N 以及 $q\cdot N$ 等的取值情况均有严格的限制（本文中的式（23）～（25））．

值得指出的是，本文所研究的态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q$ 及态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 中的 N-Y 最小测不准态与 N-H 最小测不准态，它们出现的条件与文献 7、8 所述的态 $|\Psi^{(2)},\mathrm{o}\rangle_q$ 及态 $|\Psi^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 中的 N-Y、N-H 最小测不准态的条件完全等同！其原因何在，这个问题有待于进一步探讨．

3.2　多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 中的 N 次方 Y 压缩效应

当 $N=2p'+1$（$p'=0,1,2,3,\cdots,\cdots$）即 N 为奇数时，式（29）及式（30）可化简为

$$4\langle\Delta Y_1^2(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle$$
$$=\frac{8}{q}|C_q^{(\mathrm{e})}|^2\cdot\left\{\left\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\cos[(2p'+1)\varphi_j]\right\}^2-\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\left\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\sin[(2p'+1)\varphi_j]\right\}^2\right\}\tag{37}$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle$$
$$=\frac{8}{q}|C_q^{(\mathrm{e})}|^2\cdot\left\{\left\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\sin[(2p'+1)\varphi_j]\right\}^2-\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\left\{\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\cos[(2p'+1)\varphi_j]\right\}^2\right\}\tag{38}$$

3.2.1　态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的第一正交分量的压缩情况

当 $(2p'+1)\varphi_j=\pm(2k_\Phi+1)\pi/2$　$(k_\Phi=0,1,2,3,\cdots,\cdots)$，即

$$\varphi_j=\pm(2k_\Phi+1)\pi/[2(2p'+1)]\tag{39}$$

式（37）、（38）化简为

$$4\langle\Delta Y_1^2(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle=-\frac{8}{q}|C_q^{(\mathrm{e})}|^2\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\right]^2<0\tag{40}$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle=\frac{8}{q}|C_q^{(\mathrm{e})}|^2\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\right]^2>0\tag{41}$$

这说明，当 N 为奇数，并且各模初始相位 φ_j（$j=1,2,3,\cdots,q$）满足条件式（39）时，态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的第一正交分量存在着周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩效应；式从（40）可看出，N 次方 Y 压缩与 q、R_j 以及 $N=2p'+1$ 等非线性相关；对于 p' 的不同取值，N 的取值各不相同，与之相应，N 次方 Y 压缩效应的压缩程度和压缩深度各不相同．各不同阶的 N 次方 Y 压缩效应既互相独立，又可同时存在．但在这种情况下，态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的第二正交分量既不呈现 N 次方 Y 压缩，也不处于 N-Y 最小测不态．

3.2.2　第二正交分量的压缩情况

当 $(2p'+1)\varphi_j=\pm k'_\Phi\pi$　$(k'_\Phi=1,2,3,\cdots,\cdots)$，即

$$\varphi_j=\pm k'_\Phi\pi/(2p'+1)\tag{42}$$

时，式（37）、（38）化简为

$$4\langle\Delta Y_1^2(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle=\frac{1}{q}8|C_q^{(\mathrm{e})}|^2\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\right]^2>0\tag{43}$$

$$4\langle\Delta Y_2^2(2p'+1)_q\rangle-\langle[A_q(2p'+1),A_q^+(2p'+1)]\rangle=-\frac{1}{q}8|C_q^{(\mathrm{e})}|^2\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right)\cdot\left[\sum_{j=1}^{q}R_j^{2p'+1}\right]^2<0\tag{44}$$

以上两式表明：当 $N=2p'+1$（$p'=0,1,2,3,\cdots,\cdots$）即 N 为奇数，且各模初始相位 φ_j（$j=1,2,3,\cdots,q$）满足式（42）时，态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的第二正交分量存在着周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩效应．在这种情况下，第一正交分量既不呈现 N 次方 Y 压缩，又不处于 N-Y 最小测不准态．值得一提的是，第二正交分量的压缩情况与第一正交分量的相同，但两者的压缩条件相反．另外，态 $|\Psi_*^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的 N 次方 Y 压缩的压缩条件及结果与文献 8 所述的态 $|\Psi^{(2)},\mathrm{e}\rangle_q$ 的 N 次方 Y 压缩的压缩条件及其相应结果完全相同，这一问题值得进一步深入探讨．

3.3 多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)},e\rangle_q$ 中的 N 次方 H 压缩效应

当 N 为奇数，q 为奇数，从而使这两者之积 $q\cdot N$ 为奇数时，必有

$$\left.\begin{array}{ll} q=2p'_q+1 & (p'_q=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \\ N=2p'_N+1 & (p'_N=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \\ q\cdot N=(2p'_q+1)(2p'_N+1)=2p'+1 & (p'=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \end{array}\right\} \tag{45}$$

在这种情况下，式(31)、(32)可化简为

$$\begin{aligned} &4\langle\Delta H_1^2[(2p'+1)/q]_q\rangle-\langle[B_q[(2p'+1)/q],B_q^+[(2p'+1)/q]]\rangle \\ &=8|C_q^{(e)}|^2\prod_{j=1}^{q}R_j^{2((2p'+1)/q)}\left\{\cos^2\left[\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right]-\exp(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2)\sin^2\left[\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right]\right\} \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} &4\langle\Delta H_2^2[(2p'+1)/q]_q\rangle-\langle[B_q[(2p'+1)/q],B_q^+[(2p'+1)/q]]\rangle \\ &=8|C_q^{(e)}|^2\prod_{j=1}^{q}R_j^{2((2p'+1)/q)}\left\{\sin^2\left[\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right]-\exp(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2)\cos^2\left[\frac{2p'+1}{q}\sum_{j=1}^{q}\varphi_j\right]\right\} \end{aligned} \tag{47}$$

3.3.1 第一正交分量的压缩情况

当各模的初始相位之和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 满足条件

$$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j=\pm(2k_\Phi+1)q\pi/[2(2p'+1)] \qquad (k_\Phi=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \tag{48}$$

时，式(46)与(47)分别化简为

$$\begin{aligned} &4\left\langle\Delta H_1^2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)_q\right\rangle-\left\langle\left[B_q\left(\frac{2p'+1}{q}\right),B_q^+\left(\frac{2p'+1}{q}\right)\right]\right\rangle=-8|C_q^{(e)}|^2\prod_{j=1}^{q}R_j^{2\left(\frac{2p'+1}{2}\right)}\cdot\exp\left(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2\right) \\ &<0 \end{aligned} \tag{49}$$

$$4\left\langle\Delta H_2^2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)_q\right\rangle-\left\langle\left[B_q\left(\frac{2p'+1}{q}\right),B_q^+\left(\frac{2p'+1}{q}\right)\right]\right\rangle=8|C_q^{(e)}|^2\prod_{j=1}^{q}R_j^{2\left(\frac{2p'+1}{2}\right)}>0 \tag{50}$$

由式(49)、(50)可见，态 $|\Psi_{*}^{(2)},e\rangle_q$ 的第一正交分量在满足式(45)和式(48)的条件时，存在着周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应；而在同一条件下，态 $|\Psi_{*}^{(2)},e\rangle_q$ 的第二正交分量既不呈现 N 次方 H 压缩效应，也不处于 N-H 最小测不准态．式(49)所表征的 N 次方 H 压缩效应的压缩程度和压缩深度与 $C_q^{(e)}$、R_j、q 及 $q\cdot N=2p'+1$ 等呈较强的线性关联．p' 的取值不同，N 就不同，与之相应，式(49)所表征的 N 次方 H 压缩的压缩程度和深度就各不相同．

3.3.2 第二正交分量的压缩情况

当各模初始相位之和 $\sum_{j=1}^{q}\varphi_j$ 满足关系

$$\sum_{j=1}^{q}\varphi_j=\pm k'_\Phi\pi q/(2p'+1) \qquad (k'_\Phi=0,1,2,3,\cdots,\cdots) \tag{51}$$

时，式(46)、(47)分别化简为

$$4\left\langle\Delta H_1^2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)_q\right\rangle-\left\langle\left[B_q\left(\frac{2p'+1}{q}\right),B_q^+\left(\frac{2p'+1}{q}\right)\right]\right\rangle=8|C_q^{(e)}|^2\prod_{j=1}^{q}R_j^{2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)}>0 \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &4\left\langle\Delta H_2^2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)_q\right\rangle-\left\langle\left[B_q\left(\frac{2p'+1}{q}\right),B_q^+\left(\frac{2p'+1}{q}\right)\right]\right\rangle=-8|C_q^{(e)}|^2\prod_{j=1}^{q}R_j^{2\left(\frac{2p'+1}{q}\right)}\cdot\exp(-2\sum_{j=1}^{q}R_j^2) \\ &<0 \end{aligned} \tag{53}$$

由式(52)、(53)可见，在满足条件式(45)和式(51)的情况下，态 $|\Psi_{*}^{(2)},e\rangle_q$ 的第二正交分量也存在着周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应，而第一正交分量既不呈现 N 次方 H 压缩效应，也不处于 N-H 最小测不准态．式(53)所表征的第二正交分量的 N 次方 H 压缩效应与式(49)所表征的第一正交分量的 N 次方 H 压缩效应两者的压缩情况完全相同，但其压缩条件式(51)与式(48)却是完全不同的．

对于式(49)及式(53)来说，1)若 $0<R_j<1$，p' 的值越大即压缩阶数越高，它们表征的 N 次方 H 压缩效应的压缩程度就越弱；反之，亦然．2)若 $R_j=1$，则其所表征的 N 次方 H 压缩效应的压缩程度和深度与 p' 及 N 无关，而完全由 $C_q^{(e)}$ 和 q 决定；3)若 $R_j>1$，如果 p' 的值越大即压缩阶数越高，那末，它们所

表征的 N 次方 H 压缩效应的压缩程度就越强;反之,亦然 .

将表征 N 次方 Y 压缩的式(40)及式(44)与表征 N 次方 H 压缩的式(49)及式(53)进行比较,我们就会发现,N 次方 H 压缩与参数 q、N 以及 R_j 的非线性关联程度要比 N 次方 Y 压缩更强 .

4　关于“压缩简并”现象的几点说明

值得一提的是,本文所讨论的多模复共轭奇、偶相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, {}^{o}_{e}\rangle_q$ 的 N-Y 最小测不准态、N-H 最小测不准态、N 次方 Y 压缩、N 次方 H 压缩的条件及结论与文献 7、8 所讨论的多模奇、偶相干态光场 $|\Psi^{(2)}, {}^{o}_{e}\rangle_q$ 的各相应结果和结论完全相同!

必须指出,多模复共轭奇、偶相干态 $|\Psi_{*}^{(2)}, {}^{o}_{e}\rangle_q$ 与多模奇、偶相干态 $|\Psi^{(2)}, {}^{o}_{e}\rangle_q$ 是截然不同的两种量子态,这两种相干态光场理应存在完全不同的压缩特性 . 但本文研究的结果却表明,这两者具有完全相同的压缩特性和压缩效果 . 我们把这种现象,称为“压缩简并”.

理论分析的结果表明,无论单、双模光场还是多模光场,其光子湮没算符的二次幂具有八个本征态,即四个奇相干态和四个偶相干态 . 对于多模光场而言,这八个本征态分别是:多模奇相干态、多模复共轭奇相干态、多模虚奇相干态、多模虚共轭奇相干态、多模偶相干态、多模复共轭偶相干态、多模虚偶相干态和多模虚共轭偶相干态等 . 其中,四个奇相干态光场只存在 N-Y 最小测不准态和 N-H 最小测不准态,而不存在 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩效应,但由于任意两个奇相干态光场的线性叠加所构成的新的量子光场态却存在上述的压缩特性 . 在上述的四个偶相干态光场中,多模偶相干态与多模复共轭偶相干态两者存在完全相同的压缩特性即出现所谓的“压缩简并”现象,但是,由多模偶相干态与多模复共轭偶相干态的线性叠加所组成的新的量子光场态、以及由多模虚偶相干态与多模虚共轭偶相干态的线性叠加所组成的新的量子态等既具有 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩效应,同时又可使上述的“压缩简并”现象得以消除 . 那么,为什么会出现“压缩简并”现象,其原因是什么,其本质又将如何?这是以前压缩态研究领域不曾出现、同时又是本课题研究中予以深究的一个十分重要的物理问题 . 关于这些问题,我们将另文探讨 .

5　结论

综上所述,可得以下七点结论:

1)压缩阶数 N 为偶数时,多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, o\rangle_q$ 与多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, e\rangle_q$ 两者均不存在 N 次方 Y 压缩效应,而是恒处于 N-Y 最小测不准态 .

2)当压缩阶数 N 为奇数时:①多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, o\rangle_q$ 既不处于 N-Y 最小测不准态,也始终不呈现 N 次方 Y 压缩效应 . ②多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, e\rangle_q$ 在 $\varphi = \pm(2k_{\Phi}+1)\pi/[2(2p'+1)]$时,第一正交分量存在周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩;在 $\varphi = \pm k_{\Phi'}\pi/(2p'+1)$ 时,第二正交分量存在周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩效应 .

3)当 q 与 N 之积 $q \cdot N$ 为偶数时,多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, o\rangle_q$ 与多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, e\rangle_q$ 均不存在 N 次方 H 压缩效应,而是恒处于 N-H 最小测不准态 . N-H 最小测不准态对 q、N 以及 $q \cdot N$ 的取值有着严格的限制条件[本文中的式(23)~(25)],这是它与 N-Y 最小测不准态最明显的差别 .

4)当 q 为奇数、N 为奇数,使得两者之积 $q \cdot N$ 为奇数时;①多模复共轭奇相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, o\rangle_q$ 既不处于 N-H 最小测不准态,也不呈现 N 次方 H 压缩效应 . ②多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)}, e\rangle_q$ 在各模初始相位之和 $\sum_{j=1}^{q} \varphi_j = \pm(2k_{\Phi}+1)q\pi/[2(2p'+1)]$ $(p'=0, 1, 2, \cdots, \cdots; k_{\Phi}=0, 1, 2, 3, \cdots, \cdots)$ 时,第一正交分量存在周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应;在 $\sum_{j=1}^{q} \varphi_j = \pm k_{\Phi'}\pi q/(2p'+1)$ $(k_{\Phi'}=0, 1, 2, 3, \cdots, \cdots)$ 时,第二正交分量存在周期性变化的、任意阶的 N 次方 H 压缩效应 .

5)无论是 N 次方 Y 压缩还是 N 次方 H 压缩,这两种压缩效应的压缩程度和深度均与腔模总数 q、压缩阶数 N 以及压缩参数 R_j $(j=1, 2, 3, \cdots, q)$ 等非线性相关;N 次方 H 压缩与上述参量的非线性关联程度要比前者更强,这表明 N 次方 H 压缩效应的压缩阶数比 N 次方 Y 压缩效应的压缩阶数更高 . 各

不同阶的 N 次方 Y 压缩效应与 N 次方 H 压缩效应既互相独立，又可同时存在.

6) 在多模复共轭偶相干态光场 $|\Psi_{*}^{(2)},e\rangle_q$ 中，不同模之间的非经典量子关联性和模间的竞争效应即不同模之间的量子干涉现象的存在，是导致态 $|\Psi_{*}^{(2)},e\rangle_q$ 中存在着周期性变化的、任意阶的 N 次方 Y 压缩和 N 次方 H 压缩效应的根本原因. 可以看出，态 $|\Psi_{*}^{(2)},e\rangle_q$ 的压缩情况，在本质上仅由模间的量子干涉现象决定，而与态间的量子干涉现象无关.

7) 以上六点结论与文献 7～8 所报道的有关多模奇、偶相干态光场中的相应结果和结论一致. 这就表明：在多模压缩态领域中，两个截然不同的量子光场态可以具有完全相同的压缩特性和压缩效果，这种现象称为"压缩简并". "压缩简并"是本文揭示出的一种新的物理现象，其物理图象及物理本质究竟是什么，这个问题尚有待于进一步探讨.

参考文献

1 杨志勇，侯洵. 一种双模叠加态光场的两种非线性高阶压缩效应研究. 光子学报，1998，27(4)：289～299
2 侯洵，杨志勇. 第Ⅰ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究. 光子学报，1998，27(10)：865～878
3 杨志勇，侯洵. 多模辐射场的广义非线性高阶差压缩－N 次方 X 压缩的一般理论. 光子学报，1998，27(12)：1065～1069
4 杨志勇，侯洵. 第Ⅱ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究. 光子学报，1998，27(11)：961～974
5 杨志勇，侯洵. 多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论. 光子学报，1999，28(5)：385～392
6 杨志勇，侯洵. 量子光子领域中的若干重大进展. 见：新世纪科学论坛. 西安：陕西科学技术出版社，1999，125～139
7 许定国，侯瑶，杨志勇，侯洵. 多模奇相干态光场中的 N-Y 最小测不准态与 N-H 最小测不准态. 光子学报，1999，28(7)：577～587
8 许定国，侯瑶，杨志勇，侯洵. 多模偶相干态光场中的 N 次方 Y 压缩与 N 次方 H 压缩特性研究. 光子学报，1999，28(6)：481～495
9 Stoler D. Equivalence clases of mimimum uncertainty packets. Phys Rev(D)，1970，1(2)：3217～3219
10 Hillery M. Amplitude-Square squeezing of the electromagnetic field. Phys Rev(A)，1987，36(8)：3796～3802
11 Bergou J A，Hillery M，Yu Daoqi. Minimum uncertainty states for amplitude-square Squeezing：Hermite polynomial states. Phys Rev(A)，1991，43(1)：515～520
12 Zhng Z M，Xu Lei，Chai Jinlin，Li Fuli. A new kind of higher-order squeezing of radiation field. Phys Lett(A)，1990，150(1)：27～30
13 Hillery M. Sum and difference squeezing of the electromagnetic field. Phys Rev(A)，1989，40(6)：3147～3155
14 杨志勇. 多模辐射场的量子统计性质以及时域量子化问题研究[博士学位论文]. 中国科学院西安光学精密机械研究所，1999：1～16，18～88

THE PROPERTIES OF BOTH N-TH POWER Y-SQUEEZING AND N-TH POWER H-SQUEEZING OF THE MULTI-MODE COMPLEX COJUGATION ODD AND EVEN-COHERENT STATE LIGHT FIELD*

Xu Dingguo[1),2)], Hou Yao[3)], Wang Juxia[4)], Yang Zhiyong[1)], Hou xun[1),4)]

1) *Institute of Photonics & Photon-Technology, and Provincial Key Laboratory of Photoelectronic Technology, Northwest University, Xi′an* 710069, *P·R·China*

2) *Physics Department of Shangluo Normal College, Shangzhou, Shaanxi province*, 726000, *P·R·China*

3) *Physics Department of Northwest University·Xi′an* 710069, *P·R·China*

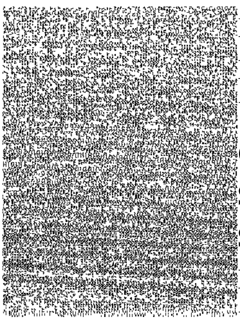
4) *Research Section of Quantum Optics & Photonics·Weinan Normal College·Weinan* 714000, *Shaanxi Province·P·R·China*

5) *Xi′an Institute of Optics & Precision Mechanics, and State Key Laboratory of Transient Optical Technology, The Academy of Sciences of China, Xi′an* 710068, *P·R·China*

Received date: 1999－06－28

Abstract In this paper, the properties of N-th power Y-squeezing and N-th power H-squeezing of the multi-mode odd and even-coherent state light field is studied in detail, that is based upon utilizing the theory of generalized nonlinear equal-order and unequalled-order higher-order squeezing of multi-mode radiative light field which is proposed by Yang Zhiyong and Hou Xun recently. It is found that, ① When N, the number of squeezing-order, is an even number, the multi-mode complex conjugation odd-coherent state light field only present N-Y minimum uncertainty state; When $q \cdot N$, the products of cavity modes number and squeezing-order number, is an even-number multi-mode complex conjugation odd-coherents state present N-H minimum uncertainty state only; and when N and $q \cdot N$ are any numbers, multi-mode complex conjugation odd-coherent state does not present the properties of N-th power Y-squeezing and N-th power H-squeezing. ② The multi-mode complex conjugation even-coherent state light field, under some certain conditions, can present any order N-th power Y-squeezing and N-th power H-squeezing which changes periodically. ③Both the squeezing result and squeezing characteristic between multi-mode complex conjugation even-coherent state light field and multi-mode even-coherent state light field are the same completely, this phenomenon is so-called 'squeezing degenerate'.

Keywords Multi-mode complex conjugation odd-coherent state light field; Multi-mode complex conjugation even-coherent state light field; N-Y minimum uncertainty state; N-H minimum uncertainty state; N-th power Y-squeezing; N-th power H-squeezing; Squeezing degenerate



Xu Dingguo was born on November 26, 1961, in Luonan County, Shaanxi Province, P. R. China. He earned B. Sc. in Physics from Xi′an Jiaotong University in 1983. Now he works at Physics Department of Shangluo Normal College as a lecturer. Since 1997, he has been the members of Chinese Physical Society and Shaanxi Provincial Physical Society respectively. Currently as a M. Sc. candidate, he is studing at Institude of Photonics & Photon-Technology, and Provincial Key Laboratory of Photoelectronic Technology of Northwest University, and his major research fields include quantum optics and photonics.

* Supported by the funds of both the natural science of Shaanxi Province and the specialized science reaseach of Educational Committee of Shaanxi Province P·R·China